数值分析 24 春期末

2025 年 4 月 15 日

题目 1. (10 分) 设 $f(x)=|x^2-2|, x\in[-1,1]$, 构造 2 次多项式 $p(x)$, 使得

$$\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-p(x)|$$

最小.

题目 2. (10 分) 设 $f\in C^{n+1}[a,b]$ ，多项式 p 是 f 在不同结点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上的 Lagrange 插值多项式，$\deg p\leqslant n$.

证明:对 $[a,b]$ 中每个 x, 都存在互不相同的 $\eta_i; i=1,2,\cdots,n$ 和 $\xi_x\in(a,b)$ 使得

$$f'(x)-p'(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=1}^{n}(x-\eta_i).$$

题目 3. (15 分) 设 $f\in C^4[-1,1]$,

- 构造 Hermite 插值多项式 $p_3(x)$, 满足

$$p_3(-1)=f(-1), p_3(1)=f(1), p_3'(-1)=f'(-1), p_3'(1)=f'(1).$$

- 利用插值多项式 $p_3(x)$ 推导出数值积分公式 $I(f)$ 逼近 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

- 证明数值积分公式满足如下误差表达式

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - I(F)\right| \leqslant \frac{2}{45} \max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

题目 4. (16 分) 区间 $[a,b]$ 上的边值问题

$$\begin{cases} -y'' + y = g(x) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

的解 $y(x)$ 是充分光滑的函数。考虑该方程的如下数值格式

$$-\frac{1}{h^2}\left(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}\right) + \beta_{-1}y_{j-1} + \beta_0 y_j + \beta_1 y_{j+1} = \beta_{-1}g_{j-1} + \beta_0 g_j + \beta_1 g_{j+1}$$

其中 $\beta_{-1}, \beta_0, \beta_1$ 是常数.T_j 是格式的局部截断误差。

- 若 $\beta_{-1} = \beta_1 = \frac{1}{12}, \beta_0 = \frac{5}{6}$. 证明

  $$T_j = \frac{1}{240}h^4 y^{(6)}\left(x_j\right) + Z_j^{(4)} h^6$$

  其中 $\left|Z_j^{(4)}\right| \leqslant \frac{1}{60480}M, M > 0$ 为有界量.

- 给出该格式的整体误差收敛阶的证明.

题目 5. (24 分) 考虑无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ，函数 f 充分光滑，$f'(0) \neq 0$, 且 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 衰减速度同 $x^{-1-\alpha}$ ，其中 $\alpha > 0$.

- 给出利用 n 个均匀单元的复化梯形公式计算 $\int_0^L f(x)dx$ 的公式，当 $n \to +\infty$ 且 L 固定时分析其误差。

- 当利用以上方法近似无穷积分时，如何选择 L 使其随 n 变化时误差下降速度最快? 并给出此时误差下降的速度。

- 利用变量代换 $x = L(1+y)/(1-y), y = (x-L)/(x+L)$ 代入无穷积分得到 $\int_{-1}^{1} F_L(y)dy$, 利用 n 个均匀单元上的复化梯形公式计算时，对于固定的 L 给出其误差公式。

- 比较上述两种近似无穷积分的方法，那种更优?

题目 6. (25 分) 考虑多步方法

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \frac{h}{2}\left(2(1-\alpha) f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) + 3\alpha f\left(x_n, y_n\right) - \alpha f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)$$

其中 α 是实数,$h > 0$

- 分析方法的相容性和收敛阶与 α 之间的关系, 确定使得该多步法精度最高的 α^*.

- 考虑如下常微分方程组

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 500 \\ -10 & -1005 \end{pmatrix} y(x), \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

  采用 α^* 对应的多步方法求解以上常微分方程组, $h = 0.01$ 是否为合适的步长? 如果不是, 给出你对步长 h 的选择, 并给出合理的理由.