中国科学技术大学数学科学学院

2024 ~ 2025 学年秋季学期期中考试试卷

课程名称 数学分析 (B3) 课程编号 MATH1008

考试时间 2024 年 11 月 5 日 9:45-11:45 考试形式 闭卷

姓 名 ________ 学 号 ________ 学 院 ________

题号	一	二	三	总分
得分				

一、【30 分】如下三小问每问 10 分.

(1) 叙述实数列的极限点与 $\mathbb{R}$ 的子集的聚点的定义.

(2) 设 a 是实数列 $\{x_n\}$ 的极限点, 设 $\{x_n\}$ 有子列 $\{y_n\}$ 收敛于 a, 并且对于任意 $n \neq m$ 成立 $y_n \neq y_m$. 证明: a 是数集 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的聚点.

(3) 设 $\{x_n\}$ 是一个各项两两不同的有界实数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(x_{n+1}-x_n\big)=0$. 证明: $\{x_n\}$ 的极限点集合是一个闭区间, 规定独点集合为退化闭区间.

二、【30 分】设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上不恒为零的实值连续函数, 设 $f(a)=f(b)=0$, 且 $f^{-1}(0)=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$ 为可数无限集合. 如下四小问独立评分, 且可用前面小问的结论.

(1)【5 分】证明: 集合 $B=\{x\in[a,b]:f(x)\neq 0\}$ 是开集.

线 订 装

(2)【10 分】证明: B 可以表为一列两两不交的非空开区间之并 $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

(3)【5 分】证明: 正数列 $\{(b_n-a_n)\}$ 里有最大项, 将其记作 c.

(4)【10 分】证明: 对于任意 $\lambda \in (0, c)$, 方程 $f(x) = f(x+\lambda)$ 在 $[a, b]$ 里有解.

三、【40 分】设 $\gamma \in \mathbb{R}$ 是无理数, 设 $0 < a < b < 1$. 设 $\chi_{(a,b)}(x)$ 为开区间 (a, b) 的特征函数, 即, 它在 (a, b) 上取值 1, 在 $[0, 1)\backslash(a, b)$ 上取值 0; 将之延拓为周期为 1 的函数, 且仍记作 $\chi_{(a,b)}(x)$. 如下四小问独立评分, 每小问 10 分, 解答时可用前面小问结论.

(1) 回忆欧拉公式: 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$, 其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 证明: 对于任意非零整数 k, 成立

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi \mathrm{i} k \cdot n\gamma} = 0.$$

(2) 证明: 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在两个连续非负周期为 1 的函数 f_ϵ^+, f_ϵ^-, 使得 $f_\epsilon^- \le \chi_{(a,b)} \le f_\epsilon^+$ 以及

$$b - a - 2\epsilon \le \int_0^1 f_\epsilon^-(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 f_\epsilon^+(x)\,\mathrm{d}x \le b - a + 2\epsilon.$$

(3) 证明: 对于任意周期为 1 的连续函数 f, 成立

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

提示 利用 Fejér 定理.

(4) 证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sharp\{1\le n\le N:\langle n\gamma\rangle\in(a,\,b)\}}{N}=b-a.$$

这里 $\langle\gamma\rangle\ =\gamma-[\gamma]$ 是 γ 的小数部分, $\sharp A$ 表示有限集合 A 的元素个数.

提示 等价于证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,\,b)}(n\gamma)=\int_0^1\chi_{(a,\,b)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

24.11. B3 期中考试参考解答与评分标准

1. (i-ii) 略　(iii) 设数列 $\{x_n\}$ 的上极限为 b, 下极限为 a. 如果 $a=b$, 那么数列收敛, 自明. (2 分) 以下设 $a<b$, 并用反证法. 设存在 $c\in(a,\,b)$ 不是该数列的极限点. 那么存在 $\epsilon>0$ 使得:

- $[c-\epsilon,\,c+\epsilon]\subset(a,\,b)$;
- 当 n 充分大时, 数列 $\{x_n\}$ 中仅有限多项落在区间 $(c-\epsilon,\,c+\epsilon)$ 里, 不妨设数列的每一项都不在该区间里;
- 当 n 充分大时, $|x_n-x_{n+1}|<\epsilon$. (4 分)

回忆数列的上极限为 $b>c-\epsilon$, 下极限为 $a<c-\epsilon$. 对于任意 n, 要么 $x_n\le c-\epsilon$, 要么 $x_n\ge c+\epsilon$; 并且这两个条件给出下标集 $\mathbb{N}$ 的由两个无限子集构成的分拆 (2 分). 于是可取严格单调增的正整数列 $\{n_k\}$, 使得对于任意 k, 成立 $x_{n_k}\le c-\epsilon$ 与 $x_{n_k+1}\ge c+\epsilon$. 于是 $|x_{n_k}-x_{n_k+1}|\ge 2\epsilon$, 矛盾 (2 分).

2. (i) 由 $f(a)=f(b)=0$ 得 $B\subset(a,\,b)$(1 分). 记 f 在 $(a,\,b)$ 上的限制函数为 g, 则 g 连续 (2 分). B 等于开集 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 在 g 下的原像, 所以 B 是开集 (2 分).

(ii) 由开集结构定理, B 可以写成至多可数个两两不交的开区间之并 (3 分).

以下用反证法证明 B 一定是可数个两两不交的开区间之并: $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,\,b_n)$. 假设 B 是有限个两两不交的开区间的并, 不妨设 $B=(a_1,\,b_1)\cup(a_2,\,b_2)$, 其中 $a\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le b$. 如果 $b_1<a_2$, 那么不可数集合 $[b_1,\,a_2]$ 包含于 $f^{-1}(0)$, 矛盾. 类似可得, $a=a_1$ 与 $b_2=b$, 那么 $f^{-1}(0)$ 为有限集合 $\{a,\,b_1,\,b\}$, 亦矛盾. (4 分)

因 B 包含于 $(a,\,b)$, 得 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\le b-a$, 从而 $b_n-a_n\to 0$(3 分).

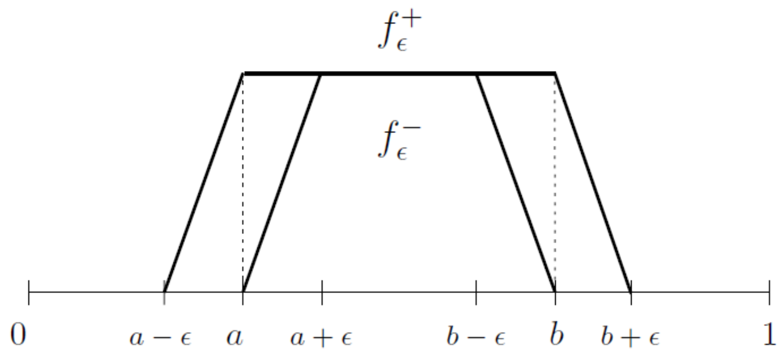
(iii) 约化为证明 “收敛于零的正数列 $\{c_n\}$ 有最大项”. 事实上, 存在 N, 对于任意 $n>N$, 成立 $c_n<c_1$(3 分). 那么数列 $\{c_n\}$ 里的最大项等于 $\max\big(c_1,\ldots,c_N\big)$(2 分).

(iv) 不妨设 $c=b_1-a_1$ 是数列 $\{b_n-a_n\}$ 的最大项. 由 B 的定义, $f(a_1)=f(b_1)=0$, 且 f 在开区间 $(a_1,\,b_1)$ 上恒正或者恒负, 不妨设为恒正 (4 分). 任取 $\lambda\in(0,\,c)$, 易见 $f(a_1)-f(a_1+\lambda)=-f(a_1+\lambda)<0,\quad f(b_1-\lambda)-f(b_1)=f(b_1-\lambda)>0$(3 分). 利用介值定理, 存在 $x\in(a_1,\,b_1-\lambda)$, 使得 $f(x)-f(x+\lambda)=0$ (3 分).

3. 此题由 Weyl 等分布原理改编而成.

(i) 由 γ 为无理数, 对于任意非零整数 k, 都有 $1-e^{2\pi\mathrm{i}k\gamma}\neq 0$ (5 分). 再由等比级数求和公式得证 (5 分).

(ii) 构造过程如下图所示, 酌情给分.



(iii) 称集合 $\{e^{2\pi ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ 中函数的有限线性组合为三角多项式. 任给 $\epsilon > 0$, 由 Fejér 定理, 存在三角多项式 $P(x)$, 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立 $|f(x) - P(x)| < \epsilon/3$ (4 分). 经计算知, 恒等式对三角多项式成立; 当 N 充分大时, 有

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (3\text{ 分}).$$

最后, 由三角不等式得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n\gamma) - P(n\gamma)| + \\ &\quad + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| + \\ &\quad + \int_0^1 |P(x) - f(x)|\,dx \\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

(3 分).

(iv) 记 $S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a.b)}(n\gamma)$. 任给 $\epsilon > 0$, 由 (2) 得

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^-(n\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^+(n\gamma) \quad (3\text{ 分}).$$

利用 (2-3) 得 $b - a - 2\epsilon \leq \liminf_{N\to\infty} S_N$, $\limsup_{N\to\infty} S_N \leq b - a + 2\epsilon$(5 分). 由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 得 $\lim_{N\to\infty} S_N = b - a$(2 分).