中国科学技术大学

2023 ～ 2024 学年第 2 学期期中考试试卷

■A卷　　□B卷

课程名称 数学分析B2　　课程编号 MATH1007

考试时间 2024年4月27日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、计算下列各题 (每小题 5 分, 共 35 分)

(1) 求函数$u = xyz$ 在点$(1, 2, 1)$ 沿方向$\vec{e} = (2, -1, 1)$的方向导数.

解 $\mathbf{grad}u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = (yz, zx, xy)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \mathbf{grad}u\Big|_{(1,2,1)} \cdot \dfrac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.

建议：算出梯度给2分;给出方向导数与梯度的关系公式再给2分;最终算对结果再得1分。

(2) 求过直线$l: \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0, \\ 3x - 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与平面$\pi: 3x + 2y + 3z - 9 = 0$垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为$\lambda(2x+y-z-2)+\mu(3x-2y-2z+1) = 0$,其中$\lambda, \mu$是不全为零的实数.即 $(2\lambda + 3\mu)x + (\lambda - 2\mu)y + (-\lambda - 2\mu)z + (-2\lambda + u) = 0$.由题意知$(2\lambda+3\mu, \lambda-2\mu, -\lambda-2\mu)\cdot(3, 2, 3) = 0$,从而$3(2\lambda+3\mu)+2(\lambda-2\mu)+3(-\lambda-2\mu) = 0$.推得$\mu = 5\lambda$, 进而知本题所求的平面方程是 $17x - 9y - 11z + 3 = 0$.

估计这道题,多半的同学不会这么去做，他们会先去求出直线l的点向式方程是

$\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-7}$,　　2分

然后求出待求平面的法向量是$n_1 = s \times (3, 2, 3) = (17, -9, -11)$　　2分

给出最终答案　　1分

(3) 设函数$f(x, y)$具有连续的一阶偏导数, $f(1, 1) = 1$, $f'_x(1, 1) = a$ 且$f'_y(1, 1) = b$,求函数$u(x) = f(x, f(x, x))$在$x = 1$处的微分.

答 $\mathrm{d}u|_{(x=1)} = (a + ab + b^2)\,\mathrm{d}x$. 建议:

令$t = f(x, x)$, 则 $\mathrm{d}t\Big|_{x=1} = f'_1\mathrm{d}x + f'_2\mathrm{d}x = (a + b)\mathrm{d}x$　　2分

$\mathrm{d}u\Big|_{x=1} = f'_1\Big|_{x=1}\mathrm{d}x + f'_2\Big|_{x=1}\mathrm{d}t = a\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}t = (a + ab + b^2)\,\mathrm{d}x$　　3分

装　订　线

(4) 求$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi x\cos xy\ \mathrm{d}x$.

解 令$D=[0,\pi]\times[0,1]$,

$I=\iint\limits_D x\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^1 x\cos xy\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2.$

建议：交换积分次序给3分,算对结果再得2分.

(5) 已知$z=z(x,y)$是由方程$f(yz,y-x)=0$所确定的隐函数,其中f具有连续的一阶偏导数,且$f_1'(yz,y-x)\neq 0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解令$F(x,y,z)=f(yz,y-x)$, 则$F_x'=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot(-1)=-f_2'$; $F_y'=zf_1'+f_2'$; $F_z'=yf_1'$. 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{f_2'}{yf_1'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{zf_1'+f_2'}{yf_1'}.$$

建议:这道题的步骤总共5个算式，每式1分。

(6) 计算$I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,x\geq 0\}$.

解 区域D关于x轴对称,记$D_1:0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},0\leq r\leq 1$,由奇偶对称性,可得

$I=\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=2\iint\limits_{D_1}\dfrac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\dfrac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{\ln 2}{2}\pi$. 建议：利用了奇偶性化简得1分；后面利用极坐标换元得2分，最终算对结果再得2分.

(7) $I=[1,2]\times[3,4]$上有连续的二阶偏导数,求积分$I=\iint\limits_I \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

答 $I=f(2,4)+f(1,3)-f(1,4)-f(2,3)$.

建议:

$I\xlongequal{2分}\int_1^2\mathrm{d}x\int_3^4\dfrac{\partial}{\partial y}(f_x')dy\xlongequal{2分}\int_1^2(f_x'(x,4)-f_x'(x,3))\mathrm{d}x\xlongequal{1分}(f(x,4)-f(x,3))\Big|_1^2.$

二、(10 分)求函数$z=(x^2+y)e^{2x+y}$的极值.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x^2+y+x)e^{2x+y}=0,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y+1)e^{2x+y}=0$ 得驻点$(1,-2)$, 4分

进一步有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right|_{(1,-2)}=6,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-2)}=2,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\right|_{(1,-2)}=1,$$

4分

则$AC-B^2>0$,且$A>0$, 故极小值为$z(1,-2)=-1$. 2分

三、(12 分) 计算$I=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$V$由$x^2+y^2=z^2$与平面$z=1$所围成.

解$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2r\,\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{10}$.

建议: 给出切薄片的式子得4分, 在薄片上用极坐标换元再得4分，最终算对结果再得4分.

四、(10 分)设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

求$f(x,y)$在点$(0,0)$沿方向$\vec{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$的方向导数,其中$\theta\in[0,2\pi)$, 并证明$f$在$(0,0)$处不可微.

解

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{(0,0)}&=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t\cos\theta,0+t\sin\theta)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\frac{(t\cos\theta)^2(t\sin\theta)^2}{((t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^2)^{3/2}}\\&=\lim_{t\to0}\frac{t^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{t|t^3|}.\end{aligned}$$

4分

所以f只能在$\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$方向上存在方向导数,且值全为0. 2分

显然$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 且若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微, 由公式$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{(0,0)}=f'_x(0,0)\cos\theta+f'_y(0,0)\sin\theta=0$,矛盾! 4分

五、(12 分)计算旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$z=2x$所围成的空间区域Ω的体积.

解 Ω在xoy平面上的投影区域D是$(x-1)^2+y^2=1$围成的圆盘,其极坐标表示为:

$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,其中$-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta$. 2分

所以

$$V \xlongequal{3分} \iint_D (2x-(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{2分} \iint_{\substack{-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\cos\theta.}} (2r\cos\theta-r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{2分} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(2r\cos\theta-r^2)r\,\mathrm{d}r \xlongequal{2分} \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{1分} \frac{\pi}{2}.$$

六、(12 分) 设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 求证

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3} \le \iiint_\Omega \sqrt{x^2+2y-2z+3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}.$$

证 设$f(x,y,z)=x^2+2y-2z+3$,由于$f'_y=2\ne 0$, $f'_z=-2\ne 0$.所以函数f在区域Ω的内部无驻点,必在边界上取得最值. 2分

令$F(x,y,z,\lambda)=x^2+2y-2z+3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. 1分

由 $\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x=0,\\ F'_y=2+2\lambda y=0,\\ F'_z=-2+2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 2分

得出驻点为 $P_1=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$P_2=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 2分

而$f(P_1)=3-2\sqrt{2}$,$f(P_2)=3+2\sqrt{2}$,所以$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的最小值为$3-2\sqrt{2}$,最大值为$3+2\sqrt{2}$. 显然,f与$\sqrt{f}$有相同的最值点,所以$\sqrt{f}$的最小值是$\sqrt{2}-1$,最大值为$\sqrt{2}+1$. 2分

所以有

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3}=\iiint_\Omega(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}v\le\iiint_\Omega\sqrt{x^2+2y-2z+5}\,\mathrm{d}v\le\iiint_\Omega(\sqrt{2}+1)\,\mathrm{d}v=\frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}.$$

3分

七、(9 分) 设$f(x,y)$在$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上有连续的二阶偏导数, 并满足$f(0,0)=f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ 以及$(f''_{xx})^2+2(f''_{xy})^2+(f''_{yy})^2\le 1$.

求证: $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{\pi}{4}$.

证 在点$(0,0)$展开$f(x,y)$得 $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_{(\theta x,\theta y)}$,其中$\theta\in(0,1)$. 3分

记$(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\sqrt{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{(\theta x,\theta y)}$,则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2).$$

由于$||(u,v,w)||=\sqrt{(f''_{xx})^2+2(f''_{xy})^2+(f''_{yy})^2}\leq 1$及$||(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)||=x^2+y^2$,于是利用Cauchy-Schwarz不等式有

$$|(u,v,w)\cdot(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)|\leq x^2+y^2,$$

即$|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 3分

从而

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 1}} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$ 3分

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$