中国科学技术大学2024-2025学年第一学期
《数学分析B1》期末考试试卷(A卷)参考解答

一. (16分, 每小题8分) 求极限:

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2 x}\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t$;

解

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\sin^2 x}\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{5/2}}\int_0^{\sqrt{x}}\tan t^4\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan x^2}{\frac{5}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{5}$$

(计算中方法正确, 只是一个笔误导致答案错误可得 6分.)

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$
$$= \int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \qquad (5\text{ 分})$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2}. \qquad (3\text{ 分})$$

二. (24分, 每小题 6 分) 计算积分

(1) $\displaystyle \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$;

解 分部积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

解 考虑对称性并作变换 $x=\tan t$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}&=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}dx$

解 利用对称性

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{-x}+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=1.$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}$

解 将$[0,+\infty)$ 分解为 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 并对在 $[1,+\infty)$上积分换元 $x=\dfrac{1}{t}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}+\int_0^1\frac{t^{2025}}{(1+t^2)(1+t^{2025})}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

三. (10分) 求解方程$y''-2y'-3y=-10\cos x$ 满足初值条件$y(0)=0,y'(0)=1$ 的特解.

解 齐次方程 $y''-2y'-3y=0$的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$, 因此齐次方程基本解组为 e^{3x}, e^{-x}. (........... 3 分)

为求方程特解, 令$y_0(x)=a\sin x+b\cos x$, 其中 a,b 待定. 代入方程并比较$\sin x,\cos x$ 前系数得 $a=1,b=2$. (........... 4 分)

因此方程的通解为

$$y(x)=\sin x+2\cos x+C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

由

$$y(0)=2+C_1+C_2=0,\ \ y'(0)=1+3C_1-C_2=1$$

解得$C_1=-\dfrac{1}{2}$, $C_2=-\dfrac{3}{2}$, 所以满足初始条件的解为

$$y(x)=\sin x+2\cos x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x},$$

(.......... 3 分)

四. (10分) 设 $f(x)=\ln^2(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 0)$.

解 (1) $f'(x)=2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, 分别将$\ln(1+x)$, $\dfrac{1}{1+x}$ 在$x=0$ 展开并相乘得

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

其中

$$c_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-1)^{n-k}=2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

因此$f(0)=0, f'(0)=0,$ (.......... 2 分)

$$f^{(n)}(0)=(n-1)!c_{n-1}=2(n-1)!(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},\ (n>1).$$

(.......... 8 分)

五. (10分) 求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛区域以及和函数.

解

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+2}\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}\right|=\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}x^2\to x^2,$$

因此收敛半径$R=1$, 当 $x=\pm1$ 时, 显然绝对收敛,

因此收敛区域为 $[-1,1]$. (.......... 4 分)

记$S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$, 则 $S'(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=2\arctan x$,

如果看不出来, 也可继续求导

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},$$

在$[0,x]$ $(|x|\le 1)$ 上积分并注意到$S(0)=0, S'(0)=0$, 因此

$$S'(x)=2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan x,$$

$$S(x)=\int_0^x 2\arctan t\,\mathrm{d}t=2x\arctan x-2\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

因和函数在$[-1,1]$ 上连续，所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\ x\in[-1,1]$$

(.......... 6 分)

六. (8分) 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{1+n^2x}\right)$ 在$(0,1)$ 上的收敛性、一致收敛性及和函数的连续性.

解 这是正项级数. 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right)<\frac{1}{1+n^2x}<\frac{1}{n^2x}$ $(x>0)$, 故, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 可知原级数在 $(0,1)$ 收敛. (.......... 3 分)

因为

$$\sup_{0<x<1}\ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right)=\ln 2\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以原级数在 $(0,1)$ 上不一致收敛. (.......... 3 分)

对任意 $\delta\in(0,1)$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right)<\frac{1}{1+n^2\delta}<\frac{1}{n^2\delta}\ (x\in[\delta,1)).$$

由 Weierstrass 判别法可知, 原级数在 $[\delta,1)$ 上一致收敛. 级数的通项在该区间上连续, 故, 原级数的和函数在该区间上也连续. 于是, 原级数的和函数在 $(0,1)$ 上连续. (.......... 2 分)

七. (10分, 每小题5分) 设 $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}$ $(n\ge 1)$,

(i) 证明数列$\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(ii) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

证明 (i) 由 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$, 可知 $n\geqslant 2$ 时,

$$0\leqslant u_n=\int_0^1\frac{1}{(1+\sin x)^n}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{(1+\frac{2}{\pi}x)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

故, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(ii) 显然 $\{u_n\}$ 是单调递减的, 因此由 Lebniz 定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. 再根据 $\sin x \leqslant x\ (0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$, 得

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+\sin x)^n}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1)}$ 发散, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 故, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛.

八. (12分, 每小题6分) (1) 设 $0<\alpha<1$, $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上非负、连续, 且

$$f(x) \le \alpha + \int_1^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t\ (x \ge 1),$$

求证: $f(x) \le \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\quad (x \ge 1)$.

(2) 设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在$[0,1]$ 上单调增. 求证

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \le \alpha \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 设 $F(x) = \alpha + \int_1^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$, 则 $F(x)$可导, $F(1)=\alpha$, $f(x) \le F(x)\ (x \ge 1)$,

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \le \left(\frac{F(x)}{x}\right)^2.$$

(........... 2 分)

$$\frac{F'(x)}{F^2(x)} \le \frac{1}{x^2}, \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{F(x)} \le 1 - \frac{1}{x},$$

$$\Longrightarrow f(x) \le F(x) < \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{x}} < \frac{\alpha}{1-\alpha}\ (x \ge 1).$$

(........... 4 分)

(2)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x)^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad = \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad = \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \int_{\frac{1}{1+\alpha}}^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x] f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad = f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}[1-(\alpha+1)x]\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad\qquad = f\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\int_0^1 (x(1-x)^\alpha)'\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

证法2　结论推广为:

设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, $\varphi'(x)\leqslant 0, \varphi(b)=0$. 又设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增. 求证:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (a-x)\varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

证明　(i) 先证当 f 是单调递增的连续函数时, (1) 式成立. 此时 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 f 的原函数, 且 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)f(x)$. 由分部积分法

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \varphi(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x)\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b \varphi'(x)\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant -\int_a^b (x-a)\varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

(.......... 3 分)

(ii) 再证当 f 是一般的单调递增函数时, (1) 也成立. 若 (1) 不成立, 则

$$\varepsilon := \int_a^b \varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-a)\varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [(x-a)\varphi(x)]' f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

取 $M>0$ 使得 $\left|[(x-a)\varphi(x)]'\right| \leqslant M$. 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积且递增, 所以存在 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数 $g(x)$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{M}.$$

由 (i) 中所证 (1) 式对单调递增的连续函数 f 成立. 故, 有

$$\int_a^b [(x-a)\varphi(x)]' g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

因而

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leqslant \int_a^b [(x-a)\varphi(x)]' f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b [(x-a)\varphi(x)]' g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [(x-a)\varphi(x)]' (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这是矛盾! 于是, 结论得证. (.......... 3 分)