中国科学技术大学2024-2025第一学年
数学分析A3期末考试参考解答

2025年1月2日

一、 (24分) 计算题。

(1) 设 $\varphi(u)=\displaystyle\int_u^{u^2}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x$，试求$\varphi'(u)$.

解：由于$x=0$是$\dfrac{\sin(ux)}{x}$的可去间断点，因此对$\forall(x,u)\in\mathbb{R}^2$ 都连续，从而有

$$\varphi'(u) = \int_u^{u^2}\cos(ux)\mathrm{d}x+\frac{2\sin u^3}{u}-\frac{\sin u^2}{u}=\frac{3\sin u^3-2\sin u^2}{u}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\int_0^1[\,e^{\lambda x^2}+\ln x\,\cos^2\frac{x}{\lambda}\,]\mathrm{d}x.$

解: 原式$=\int_0^1 dx+\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\int_0^1\ln x\,\frac{1+\cos 2\lambda^{-1}x}{2}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\mathrm{d}x.$

解: 令$t=x^n$后，使用余元公式可得，

原式$=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1(1-t)^{-1/n}t^{1/n-1}}{n}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi/n}{\sin\frac{\pi}{n}}=1.$

二、 (10分) 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上可微，且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$都收敛，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Proof. 记 $L:=\displaystyle\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$，于是由定义知：

$$L=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}f(b)-f(1),$$

这表明 $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b) = L + f(1) := A$ 存在且有限。**（5分）**

若$A \neq 0$，不妨设 $A > 0$，由定义知，对于$\epsilon = \frac{A}{2}$，存在$M > 1$，使得当$x \geq M$时，有$\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2}$，因此对$\forall b > M$ 有

$$\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = \int_1^M f(x)\mathrm{d}x + \int_M^b f(x)\mathrm{d}x > \int_1^M f(x)\mathrm{d}x + \frac{A}{2}(b - M).$$

令$b \to +\infty$，从而知 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，矛盾！同理可知 $A < 0$不行，于是有 $A = 0$. **（5分）** □

三、 (15分) 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & 1 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成Fourier级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ 的和.

Proof. 因为$f(x)$是偶函数，所以 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad \text{（5分）}$$

由Dirichlet定理知，

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin n}{n\pi}\cos(nx) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 0, & 1 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

注意到$x = 0$是连续点，因此有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$. **（5分）**

进一步由Parseval等式知，

$$\frac{2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin^2 n}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi},$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$. **（5分）** □

四、 (15分)分别讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x, \quad p>0$$

绝对收敛和条件收敛时参数p的取值范围.

Proof. (1). 当$p>1$时，注意到$|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}| \le \frac{e}{x^p}$ 和 $\int_1^{+\infty} \frac{e}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，由比较判别法知绝对收敛。 **（5分）**

(2). 当$0<p\le 1$时，条件收敛。原因如下：

注意到 $|\int_1^A \frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x = e^{\sin A} - e^{\sin 1}| \le 2$ 有界， $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$且单调，由Dirichlet判别法知收敛。 **（5分）**

另一方面，注意到 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e\,x^p}\mathrm{d}x$ 发散、 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{e\,x^p}\mathrm{d}x$ 收敛和

$$|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}| \ge \frac{\cos^2 x}{e\,x^p} = \frac{1}{e\,x^p} + \frac{\cos 2x}{e\,x^p}$$

因此 $\int_1^{+\infty} |\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}|\mathrm{d}x$ 发散。**（5分）** □

五、 (20分) 试证：反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+2024\,x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

收敛，并求其值.

Proof. 令

$$f(\alpha,x) = \frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{1+x^2}, \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(\alpha,x)\mathrm{d}x, \quad \alpha \ge 0.$$

(1). 对于给定的α，注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{\sqrt{x}} = 0$，于是存在 $c>0$ 使得

$$0 \le \frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{1+x^2} < c\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}.$$

又由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，因此由比较判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛。 **（4分）**

(2). 取定$A>2024$，当$\alpha\in[0,A]$时，注意到

$$\frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{1+x^2}\le\frac{\ln(1+A\,x^2)}{1+x^2},$$

结合(1)可知，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha\,x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于α在$[0,A]$上一致收敛。又 $f(\alpha,x)\in C([0,\infty)\times[0,A])$，从而

$$I(\alpha)\in C([0,A]),\quad I(0)=0.\qquad \textbf{（4分）}$$

(3). 断言：$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,x)\mathrm{d}x$ 在$\alpha\ge\alpha_0>0$上一致收敛。原因如下：**（4分）**

$$|\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\alpha,x)|=|\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}|\le\frac{1}{\alpha(1+x^2)}\le\frac{1}{\alpha_0(1+x^2)}.$$

因此有，

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+1)},\quad \alpha>0.$$

解得， $I(\alpha)=\pi\ln(\sqrt{\alpha}+1)+C$，$\alpha>0$. **（4分）**

(4). 进一步，由$I(\alpha)$的连续性可知 $C=0$，从而得到

$$I(\alpha)=\pi\ln(\sqrt{\alpha}+1),\quad I(2024)=\pi\ln(\sqrt{2024}+1).\qquad \textbf{（4分）}\qquad \square$$

六、 (8分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微，若

$$f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{2}),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

均成立，试证：$f(x)=$ 常数.

Proof. 由 $f(x)$ 可微和 $f(x)=f(x+2)$ 有 **（2分）**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\pi x)+b_n\sin(n\pi x)\Big)$$

这里

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x.$$

当 $n \geq 1$ 时，由 $f(x) = f(x+\sqrt{2})$ 可得下面的关系式　　　**（3分）**

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{2})\cos(n\pi x)\mathrm{d}x = a_n\cos(\sqrt{2}n\pi) + b_n\sin(\sqrt{2}n\pi),$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{2})\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = b_n\cos(\sqrt{2}n\pi) - a_n\sin(\sqrt{2}n\pi),$$

由此解得 $a_n = b_n = 0, \quad n \geq 1$，因此$f(x) = \frac{a_0}{2}$.　　　**（3分）**　　　□

七、 (8分) 设 $f(x)$在$[0,1]$上有界，试证：

$$\varphi(u) = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{|x-u|}}\mathrm{d}x$$

在$(0,1)$上连续.【类似地，可以证明在整个实轴上都连续】

Proof. 由于 $f(x)$在$[0,1]$上有界，不妨设 $|f(x)| \leq M$。注意到 $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{|t|}} = 4$，因此对于任意给定的 $\epsilon > 0$，必存在 $\eta > 0$，使得

$$\int_{-2\eta}^{2\eta} \frac{dt}{\sqrt{|t|}} < \frac{\epsilon}{3M}.$$

任取 $u_0 \in (0,1)$，只需证明 $\lim\limits_{u\to u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$。下面不妨设 $u \in (u_0 - \eta, u_0 + \eta) \subset (0,1)$。注意到

(1). 当 $x \in (u_0 - \eta, u_0 + \eta)$ 时，

$$\int_{u_0-\eta}^{u_0+\eta} \frac{|f(x)|}{\sqrt{|x-u|}}\mathrm{d}x \leq \int_{u_0-\eta}^{u_0+\eta} \frac{M}{\sqrt{|x-u|}}\mathrm{d}x = \int_{u_0-u-\eta}^{u_0-u+\eta} \frac{M}{\sqrt{|t|}}\mathrm{d}t \leq \int_{-2\eta}^{2\eta} \frac{M\,dt}{\sqrt{|t|}} < \frac{\epsilon}{6}.$$

(2). 当 $x \in [u_0 + \eta, 1]$ 时，则关于变量u的函数 $\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}$在 $[u_0 - \frac{\eta}{2}, u_0 + \frac{\eta}{2}]$上一致连续。于是对于上述的$\epsilon$，存在$\delta_1 > 0$ (与x无关)，使得当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{|x-u|}} - \frac{1}{\sqrt{|x-u_0|}}\right| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

从而

$$\int_{u_0+\eta}^{1}|\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}-\frac{1}{\sqrt{|x-u_0|}}||f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{3}.$$

(3). 同理，当$x\in[0,u_0-\eta]$ 时，存在$\delta_2>0$ (与x无关)，使得当 $|u-u_0|<\delta_2$ 时，有

$$\int_{0}^{u_0-\eta}|\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}-\frac{1}{\sqrt{|x-u_0|}}||f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{3}.$$

综上，当$|u-u_0|<min\{\frac{\eta}{2},\delta_1,\delta_2\}$ 时，有

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)| &= \left(\int_0^{u_0-\eta}+\int_{u_0-\eta}^{u_0+\eta}+\int_{u_0+\eta}^{1}\right)\Big|\frac{f(x)}{\sqrt{|x-u|}}-\frac{f(x)}{\sqrt{|x-u_0|}}\Big|\mathrm{d}x\\ &\le M\left(\int_0^{u_0-\eta}+\int_{u_0+\eta}^{1}\right)\Big|\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}-\frac{1}{\sqrt{|x-u_0|}}\Big|\mathrm{d}x\\ &+ M\int_{u_0-\eta}^{u_0+\eta}\Big|\frac{1}{\sqrt{|x-u|}}+\frac{1}{\sqrt{|x-u_0|}}\Big|<\epsilon.\end{aligned}$$

由任意性，知结论成立。 □