2024 春数学分析 A2 第三次小测

2024 年 6 月 24 日

一、 (15 分) 计算积分

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z)ds,$$

其中曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=R. \end{cases}$

二、 (15 分) 计算积分

$$\int_\Gamma (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz,$$

其中曲线 Γ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线（$z\geqslant 0$），曲线方向从原点进入第一卦限。

三、 (10 分) 计算积分

$$\iint_\Sigma x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy,$$

其中 Σ 为三角形 $\{(x,y,z): x,y,z\geqslant 0, x+y+z=1\}$, 法向量与 $(1,1,1)$ 同向。

四、 (15 分) 证明积分

$$\int_{(1,3,5)}^{(2,4,6)} z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz$$

的良定性，并计算出结果。

五、 (15 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的向量场 (z,x,y),

1 其是否是有势场？若不是，请说明理由；若是，请计算出一个势函数；

2 其是否是旋度场？若不是，请说明理由；若是，请计算出一个向量势函数。

六、 (10 分) 设 Σ 为曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在椭球面 $x^2+y^2+4z^2=2$ 内的部分，证明：

$$\iint_\Sigma \sqrt{x+y+2z+1}\,d\sigma\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

七、 (10 分) 设函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中有一阶连续偏导数，对于任意 $r>0$，任意点 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$，以其为球心，$r$ 为半径的上半球面 S 上的积分始终满足：

$$\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=0.$$

证明：$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0, R=0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中处处成立.

八、 (10 分) 设 $f(u)$ 是奇函数，且具有连续的一阶导数，Σ 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 两球面 $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=2(z>0)$ 所围立体的全表面，方向向外，求

$$\iint_\Sigma x^3dydz+[y^3+f(xy)]dzdx+[z^3+f(yz)]dxdy.$$