2024 春数学分析 A2 第二次小测参考答案

潘晨翔、王曹励文

2024 年 5 月 28 日

1　第一题

计算累次积分.

1. $\int_0^{2\pi} dx \int_x^{2\pi} \frac{x\sin^2 y}{y^2} dy$

2. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\sqrt{x^2+y^2} dz$

解:

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} dx \int_x^{2\pi} \frac{x\sin^2 y}{y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{y} \frac{x\sin^2 y}{y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 y dy = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\sqrt{x^2+y^2} dz \\ =&\frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy \\ =&\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2-2x\leqslant 0, y\geqslant 0} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy \\ =&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 dr d\theta \\ =&\frac{16}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d\theta = \frac{128}{75}\end{aligned}$$

2 第二题

设B 是 R^2 上的一个零测集，证明集合 B 没有内点. 并距离说明此命题的逆命题不成立.

1. 这个题改的比较严格，证明占 4 分，举例占 3 分，对于例子的证明，无内点占 1 分，不零测占 2 分.

2. 对于证明部分，如果没有出现覆盖等字眼基本上就是 0 分，有的同学拿积分进行证明，对集合 B 甚至可能没有办法定义其面积，需要注意和零面积集进行区分；不为零面积则不零测这种论断显然是错误的；出现了记号错误等细节问题一律扣 1 分，如 $\sigma(B)$，$\sum_i I_i$；如果用有限个矩形进行覆盖，也基本上是 0 分；使用外测度等实分析内容酌情扣分，尤其是不写明符号意义的.

3. 对于例子，错误例子 6 分不得分. 如 Cantor 集，但是其 Lebesgue 测度为 0，可以使用 fat-cantor 但是没有同学这么做；Peano 曲线也不对.

4. 对于证明，不可数则一定不零测是经典的错误.

3 第三题

利用二重积分，计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{i}{i^2+j^2}$.

解：将式子凑成黎曼和的形式，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i^2+j^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i/n}{(i/n)^2+(j/n)^2}$$

而由二重积分定义我们可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i/n}{(i/n)^2+(j/n)^2}=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x}{x^2+y^2}dxdy$$

对所求积分做极坐标换元

$$
\begin{aligned}
&\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}\cos\theta drd\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\csc\theta}\cos\theta drd\theta \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot\theta d\theta \\
=&\frac{\pi}{4}+(\ln\sin\theta)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
=&\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}
$$

4 第四题

计算三重积分 $\iiint_\Omega \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$, 其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 所围成的闭区域在第一卦限部分.

1. 这个题改的相当松，参数 θ 与 ϕ 的范围一个 1 分，r 的范围 3 分，换元公式的正确性 3 分，积分结果 2 分.
2. 如果没有用到极坐标换元但是算错了的基本上没什么分.
3. 计算正确即得满分.
4. 答案 $\frac{1}{72}$.

5 第五题

证明：曲面 $z=4+x^2+y^2$ 上任一点处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成立体的体积为定值.
解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+4-z$, 则曲面上任一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$, 从而 P 点处的切平面方程为 $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$, 化简得 $2x_0x+2y_0y-z+4-x_0^2-y_0^2=0$. 联立

$$
\begin{cases}
2x_0x+2y_0y-z+4-x_0^2-y_0^2=0 \\
z=x^2+y^2
\end{cases}
$$

消去 z, 得方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4$. 令区域 $D=\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 4\}$, 则所求立体体积为

$$\begin{aligned}V&=\iiint dxdydz\\&=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x_0x+2y_0y+4-x_0^2-y_0^2}dz\\&=\iint_D(4-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2)dxdy\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)rdrd\theta\\&=8\pi\end{aligned}$$

6 第六题

设f 是单变量函数，证明：

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 f(t)(1-t)^{n-1}dt$$

.

1. 这是课本的问题原题.
2. 如果没有彰显出换序这一步，一般得分很低，这都已经是很简单的题目了，再跳过换序这一步真不知道还有什么得分点. 只写了一步换序的同学会有 4 分左右过程分.
3. 利用 n 维单形但是存在 gap 的同学扣了 2 分过程分.

7 第七题

设函数 $f(x,y)$ 在单位圆盘域上有连续的一阶偏导数，且在圆盘的边界上函数值恒为 0，证明

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy=f(0,0)$$

其中 D 为圆盘域：$\epsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.
解：作极坐标换元，再由链式法则可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\dfrac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\end{cases}$$

代入式中化简得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2+y^2}dxdy = \iint_D \frac{r\frac{\partial f}{\partial r}}{r^2}rdrd\theta \\
&= \iint_D \frac{\partial f}{\partial r}drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^1 \frac{\partial f}{\partial r}dr \\
&= \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} f(\epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} f(\epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta)d\theta \\
&= -2\pi f(\epsilon\cos\theta_0, \epsilon\sin\theta_0)(\theta_0 \in [0, 2\pi])
\end{aligned}
$$

故

$$
\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(\epsilon\cos\theta_0, \epsilon\sin\theta_0) = f(0,0)
$$

8　第八题

证明:$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} < \int_0^a e^{-x^2}dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac{1}{2}}$, 其中 a 是任一正数.

1. 这是经典的概率积分，在 tip 里面也强调过了. 本题评分标准与隔壁班几乎相同.
2. 将该积分转化为二重积分得 2 分，不等式的一边得 4 分，一般半径正确就可以得到这 4 分，对于不等式右边的放缩原因说明不充分，没有指明函数的径向增减关系的扣 1 分.
3. 有同学利用了求导的办法完成了这个题的一部分，同样是不等式的一边得 4 分.