2024 春数学分析 A2 第一次小测参考答案

潘晨翔、王曹励文

2024 年 4 月 22 日

1 第一题

求函数 $f(x,y)=$In$(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 处的三阶带 Peano 余项的 Taylor 公式，并求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\text{In}(1+x+y)+xy-x-y}{x^2+y^2}.$$

解:

$$\text{In}(1+x+y)=(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+o((x+y)^3).$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，我们有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x+y)+xy-x-y}{x^2+y^2}\\
&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{2}(x+y)^2+xy+o((x+y)^2)}{x^2+y^2}\\
&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+o((x+y)^2)}{x^2+y^2}\\
&=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

注. 1. Taylor 展开 10'

2. 写对一元函数展开 5'，写错本题完全酌情给分

3. Peano 余项没写，展开阶数不对，第三次方有错 -3'

4. 用多元函数办法计算正确得满分，错误酌情给分

2 第二题

设函数 $u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，算子 $\mathbf{A}(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$

1. 求 $\mathbf{A}(u-\mathbf{A}(u))$
2. 利用结论 (1) 以 $\xi=\frac{y}{x},\eta=x-y$ 为新的自变量改变如下方程式

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

解:

1.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(u-\mathbf{A}(u))&=x\frac{\partial}{\partial x}(u-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}))+y\frac{\partial}{\partial y}(u-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}))\\&=-(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}(-\frac{y}{x^2})+\frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

(1)×x+(2)×y可得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}=\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

即

$$\mathbf{A}(u)=\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\=&-\mathbf{A}(u-\mathbf{A}(u))\\=&-\eta\frac{\partial}{\partial \eta}(u-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta})\\=&-\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

故方程改写为

$$\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

3 第三题

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\text{In}z+2(x+y+1)=0$ 确定的隐函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值.
解：

$$(x^2+y^2)z+\text{In}z+2(x+y+1)=0.$$

方程两边同时对 x,y 求偏导可以得到 3'×2

$$2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0. \tag{3}$$

$$2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0. \tag{4}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$，则得到驻点方程 2'

$$xz+1=0.$$

$$yz+1=0.$$

可解得

$$y=x=\frac{1}{z}.$$

将该表达式带入原方程可以解得 $x=-1,y=-1,z=1$. 2'
下面考虑 Hesse 矩阵的计算，对 (1) 两边对 x,y 求导，2'×2

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0. \tag{5}$$

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0. \tag{6}$$

对 (2) 两边对 y 求导，2'

$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial y})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{7}$$

将 $x=-1,y=-1,z=1$ 带入可得 2'

$$H=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 0\\ 0 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

因此 $z=1$ 为极大值点. 2'

注.

基本上算对 (-1,-1,1) 这个题得分都在 12 分前后，剩下的二阶导数算对得 2 分，全部完整得满分。

4 第四题

已知曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$, 且 f 可微，证明该曲面为柱面。
证明：令 $F(x,y,z)=e^{2x-z}-f(\pi y-\sqrt{2}z)$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}&=2e^{2x-z}\\
\frac{\partial F}{\partial y}&=-\pi f^{'}(\pi y-\sqrt{2}z)\\
\frac{\partial F}{\partial z}&=-e^{2x-z}+\sqrt{2}f^{'}(\pi y-\sqrt{2}z)
\end{aligned}$$

故曲面法向量为

$$\mathbf{n}=(2e^{2x-z},-\pi f^{'}(\pi y-\sqrt{2}z),-e^{2x-z}+\sqrt{2}f^{'}(\pi y-\sqrt{2}z))$$

下证明该法向量与一常向量 (a,b,c) 垂直。故有 $2a=c,\pi b=\sqrt{2}c$。不妨令 $c=2$, 则该常向量为 $(1,\frac{2\sqrt{2}}{\pi},2)$，这样该曲面的每一点的法向量 $\mathbf{n}$ 都与一定向量垂直，即为柱面。

5 第五题

设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内存在且有界，证明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.
证明：取 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 的共同上界为 M. 考虑以下的估计

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0)|\\
&=|f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0+\delta y)+f(x_0,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0)|\\
&\le|f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0+\delta y)|+|f(x_0,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0)|\\
&=|f_x'(x_0+\theta_1\delta x,y_0+\delta y)||\delta x|+|f_y'(x_0,y_0+\theta_2\delta y)||\delta y|\\
&\le M(|\delta_x|+|\delta y|).
\end{aligned}$$

令 $\delta x\to 0,\delta y\to 0$ 即知连续性的成立.

注. 这个题直接利用连续性和可微性一般得分不高，直接使用拟微分中值定理也不行，由于需要可微的条件。

6 第六题

设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内连续, 证明: $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

证明：必要性：设函数 $f(x,y)$ 可微，则 f_x, f_y 存在。

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\varphi(x,0)}{x}$$

该极限存在并且 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个邻域内连续，则只能要求 $\varphi(0,0)=0$。
充分性：$\varphi(0,0)=0$, 则 $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$.

$$|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)-f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|x-y||\varphi(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 2|\varphi(x,y)|$$

故

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)-f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

即可微。

7 第七题

设$D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续，函数 $g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足条件：

1. 当 $x^2+y^2 \to 1$ 时，$f(x,y)\to +\infty$;
2. 在 D 内 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 有二阶偏导数，$\Delta f = e^f$, $\Delta g \geq e^g$.

证明：$f(x,y)\geq g(x,y)$ 在 D 内处处成立.
证明：
定义

$$F(x,y) = f(x,y) - g(x,y).$$

当 $x^2+y^2\to 1$ 时，$f(x,y)\to+\infty$，则 $F(x,y)$ 在 D 内必然存在极小值. 设该点为 (x_0,y_0)，若待证明不成立，则 $F(x_0,y_0)<0$. 此时

$$\Delta F|_{(x_0,y_0)} = \Delta f - \Delta g \leq e^f - e^g|_{(x_0,y_0)} < 0.$$

与极小值点矛盾.

注. 这是一个简略的过程，得分在 6 分以上一般是因为个别问题没有说明白，1-4 分为根据思路的同情分。