中国科学技术大学

2023—2024学年第二学期期终考试试卷

考试科目：数学分析A2　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共八道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, 写在草稿纸上无效.

2024年7月5日

一、(20分)　　　　得分

设函数$f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$.

求$f'_x(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$.

结果. $f'_x(x,y)=\begin{cases} 2x\arctan\dfrac{y}{x}-y. & xy\neq 0. \cdots 6' \\ -y. & x=0.\ y\neq 0. - 2' \\ 0. & y=0 \quad - 2' \end{cases}$ $4'$ $10'$

$f''_{xy}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0.0). \sim 6' \\ -1. & (0.0). \quad - 4' \end{cases}$ $10'$

$=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. & xy\neq 0 \cdots 6' \\ -1. & x=0.\ y\neq 0 \quad - 2' \\ 1. & x\neq 0.\ y=0 \quad - 2' \end{cases}$

二、(20分) 得分

设$a>b>0>c$, 求函数$f(x,y)=(ax^2+by^2+cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$的全部极值.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\exp(-x^2-y^2-z^2)(a-(ax^2+by^2+cz^2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\exp(-x^2-y^2-z^2)(b-(ax^2+by^2+cz^2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z\exp(-x^2-y^2-z^2)(c-(ax^2+by^2+cz^2))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0 \text{ 或 } a=ax^2+by^2+cz^2 \\ y=0 \text{ 或 } b=ax^2+by^2+cz^2 \\ z=0 \text{ 或 } c=ax^2+by^2+cz^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$ 或 $(\pm1,0,0)$ 或 $(0,\pm1,0)$ 或 $(0,0,\pm1)$ …… 10'

$(\pm1,0,0)$. Hesse $=\begin{pmatrix} -4ae^{-1} & & \\ & 2(b-a)e^{-1} & \\ & & 2(c-a)e^{-1} \end{pmatrix}$ 负定. 极大值点. 3'

且 a/e.

$(0,\pm1,0)$ Hesse. $=\begin{pmatrix} 2(a-b)e^{-1} & & \\ & -4be^{-1} & \\ & & 2(c-b)e^{-1} \end{pmatrix}$ 正,负,负. 不是 2'

$(0,0,\pm1)$ Hesse $=\begin{pmatrix} 2(a-c)e^{-1} & & \\ & 2(b-c)e^{-1} & \\ & & -4ce^{-1} \end{pmatrix}$ 正,正,正. 正定 3' 极小 2' c/e. 1'

Hesse阵2分.

结论1分

t. $f(0,t,0)>f(0,0,0)=0>f(0,0,t)$. $(0,0,0)$ 不极值. 2'

直接对函数求导后算错了. 给4'

三、(10分)　　得分

设函数$f(u,v)$可微，函数$z=z(x,y)$是由$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定的隐函数，求$dz|_{(0,1)}$.

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\ \ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}. \qquad F: x^2f(x-z,y)+y^2-(x+1)z$$

由隐函数定理. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-z+2x\,f(x-z,y)+x^2\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(x-z,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-x^2\frac{\partial f}{\partial u}(x-z,y)-(x+1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2\frac{\partial f}{\partial v}(x-z,y)+2y$$

5'

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-2xf(x-z,y)-x^2f'_u(x-z,y)}{-x^2f'_u(x-z,y)-(x+1)} \quad \text{---} \ 2'$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-z \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2f'_v(x-z,y)+2y}{x^2f'_u(x-z,y)+(x+1)} \ \text{---}\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=2$$

$$dz|_{(0,1)}=-z\,dx+2dy. \qquad x=0,y=1\Rightarrow z=1$$

$$dz|_{(0,1)}=-dx+2dy.$$

结果 z未代入 -1

四、(10分)

得分	

求第二型曲线积分

$\int_{L^+}(y^2+z)dx+(z^2+x)dy+(x^2+y)dz$, 其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=1$的交线, 方向为从点$(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$.

Stokes公式.

$$\left.\begin{aligned}&\int_{L^+}(y^2+z)dx+(z^2+x)dy+(x^2+y)dz=\iint_{\Sigma}(1-2z)dydz\\&+(1-2x)dzdx+(1-2y)dxdy.\end{aligned}\right\}4'$$

其中 Σ: $x+y+z=1$. $x^2+y^2+z^2\le1$. 法向量 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ — 2'

$$\left.\begin{aligned}&\text{原式}=\iint_{\Sigma}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{2'}(3-2x-2y-2z)d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma(\Sigma)\\&\sigma(\Sigma)=\pi r^2,\ r^2+\frac{1}{3}=1\\&\sigma(\Sigma)=\frac{2}{3}\pi\\&\text{原式}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.\ —\ 2'\end{aligned}\right\}4'$$

用换元 换坐标时. 结果不对. 0

5'

扫描全能王 创建

五、(10分)

得分	

求第二型曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. 其中$\Sigma^+$是曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}$ $(z\geq 0)$的上半部分, 法方向朝上.

法方向朝下.

记曲面 S^+ 为上半单位球面，法方向朝下，Σ_0 为 xOy 平面上 $\begin{cases}\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\leq 1\\ x^2+y^2\geq 1\end{cases}$ 围成的区域，法方向朝下.

~~其包含在~~

再记 Ω 为由 Σ^+, S^+, Σ_0 围出来的区域，则：

$$\text{原式}=\underset{①}{\oiint_{\Sigma^+\cup S^+\cup\Sigma_0} *}-\underset{②}{\iint_{S^+} *}-\underset{③}{\iint_{\Sigma_0} *}$$

其中 * 表示被积函数式. (5')

①: 用 Gauss 公式 $=\displaystyle\iiint_\Omega\frac{(-2x^2+y^2+z^2)+(x^2-2y^2+z^2)+(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}dxdydz=0$ (7')

②: ~~用Gauss~~ $(x,y,z)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$ $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

$\Rightarrow \vec{n}=(-\cos\theta\cos\varphi,-\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta)$

$\Rightarrow$ ② $=\displaystyle\iint_{S^+}(-\cos^2\theta\cos^2\varphi-\cos^2\theta\sin^2\varphi-\sin^2\theta)\,d\sigma$

$=-\displaystyle\iint_{S^+}d\sigma=-2\pi$ (9')

③: $\vec{n}=(0,0,-1)$, 则③$=\displaystyle\iint_{\Sigma}(P,Q,0)\cdot(0,0,-1)\,d\sigma=0$

综上，原积分值为 2π. (10')

六、(10分)

得分	

设函数$f(x)$, $g(x)$均为$[a,b]$上的单调增的连续函数, 证明:

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx\ .$$

由条件. $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$ 总成立. (4')

在 $[a,b]^2$ 上积分得:

$$\iint_{[a,b]^2} f(x)g(x)\,dx\,dy + \iint_{[a,b]^2} f(y)g(y)\,dx\,dy \geq \iint_{[a,b]^2} f(x)g(y)\,dx\,dy + \iint_{[a,b]^2} f(y)g(x)\,dx\,dy$$

(8')

LHS $= 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, RHS $= 2\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx$, 证毕. (10')

七、(10分)

得分	

设函数$f(x,y)$在R^2上有一阶连续偏导数, 令$r=\sqrt{x^2+y^2}$,

满足$\lim\limits_{r\to+\infty}(xf'_x+yf'_y)=a>0$, 证明: 函数$f(x,y)$ 在R^2上有最小值.

考虑极坐标变换 $(x,y)\longrightarrow(r,\theta)$, 则 $f'_r=f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta$ (1')

于是, $xf'_x+yf'_y=rf'_r$. (3')

由题目条件, $\exists\ R>0$, s.t. $r>R$ 时, 总有 $rf'_r>\frac{a}{2}>0\Rightarrow f'_r>0$. (5')

考虑区域 $\overline{B_R(0)}$, f 在 $\overline{B_R(0)}$ 上连续, 则在其上存在最小值点 $(x_0,y_0)\in\overline{B_R(0)}$.

记 $f(x_0,y_0)=m$. (7')

任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 分两种情形讨论:

① 若 $(x,y)\in\overline{B_R(0)}$, 则 $f(x,y)\geq m$. 已成立. (8')

② 若 $(x,y)\in\left(\overline{B_R(0)}\right)^c$, 则考虑 (x,y) 与 $(0,0)$ 连接的一条直线段, 其与 $\partial B_R(0)$

交于一点 (x_1,y_1), 则 $f(x_1,y_1)\geq m$. 又由于 $r>R$ 时 $f'_r>0$, 则 $f(x,y)>f(x_1,y_1)\geq m$.

(10')

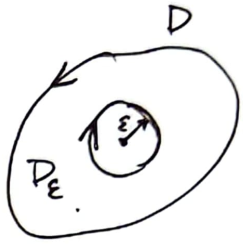
综上可知, $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上 (x_0,y_0) $(\in\overline{B_R(0)})$ 处取最小值 m.

八、(10分) | 得分 | |

设D是R^2上的有界单连通域，且原点$(0,0)\in D$，函数$f(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数，且在D的边界上，$f(x,y)\equiv 0$，计算 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D_\varepsilon = D\backslash B_\varepsilon((0,0))$.

~~想考虑极坐标变换 $(x,y)\mapsto(r,\theta)$，则 $f_r' = f_x'\cos\theta + f_y'\sin\theta$.~~

~~于是 $xf_x'+yf_y' = rf_r'$，$dxdy = rdrd\theta$.~~



通过配凑 Green 公式，得到

$$\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx). \quad (4')$$

$$= \int_{\partial D^+}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx) + \int_{\partial B_\varepsilon^-}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx)$$

$$= -\int_{\partial B_\varepsilon^+}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(xdy-ydx). \quad (*)$$

(6')

考虑极坐标变换 $x=\varepsilon\cos\theta$，$y=\varepsilon\sin\theta$，则有：

$$(*) = -\int_0^{2\pi}\frac{f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\varepsilon^2}(\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta)d\theta.$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta. \quad (8')$$

由 f 的连续性，可知：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta.$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to0^+} f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\right)d\theta = -2\pi f(0,0).$$ （这里也可换用积分平均值公式写）

(10')