2024年秋季学期数学分析(A1)期中考试

主讲教师: 任广斌、罗罗

2024年11月17日 19:00-21:00

本试卷满分100分，前两题每题15分，后七题每题10分。

一、令$f(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$，记$M(n)$为$f(x)$的最大值，求$\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

二、令$f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. 讨论$f(x)$的连续点和间断点，并指出间断点的类型。

三、若函数$f(x) = x^\alpha \cos(x^{-\beta})$在$x=0$处的二阶导数存在，求实数$\alpha, \beta$的取值范围。

四、令$f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x) & x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c & x < 0 \end{cases}$. 求实数$a, b, c$使得$f''(x)$在$\mathbb{R}$上是连续的。

五、非负数列$\{a_n\}$满足$0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$对任意正整数$m, n$成立，证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$存在。

六、证明：连续函数$f(x)$在$[a,b]$内有零点的充要条件是对任意$\lambda \in (0,1)$和任意$x_1 \in [a,b]$都存在$x_2 \in [a,b]$使得$f(x_2) = \lambda f(x_1)$.

七、设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上二阶可导($a \in \mathbb{R}$)，且有渐近线$y = bx + c$, ($b, c \in \mathbb{R}$). 证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

八、设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，且存在$c \in [a,b]$使得$f(a) = f(c) = f(b)$. 证明: $f(x)$在$[a,b]$上不可能是凸函数。

九、设$f \in C^2(\mathbb{R})$满足$\lim\limits_{|x|\to\infty} e^{-|x|} f(x) = 0$且$f(x) \leq f''(x)$. 证明: $f(x)$在$\mathbb{R}$上不可能取正值。