线性代数B2 24期末解析

1．简述实对称正定矩阵A的 5 个等价条件

（1）正惯性指数等于其阶数

（2）$0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0$

（3）A 的特征值均为正

（4）存在实对称正定方阵 B ，使得 $A = B^2$

（5）存在可逆方阵 P ，使得 $A = P^T P$

（6）A 的所有主子式为正

（7）A 的所有顺序主子式为正

2．证明酉空间的极化恒等式（10）

$$(\beta, \alpha) = \frac{1}{4}(|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2 + i|\alpha + i\beta|^2 - i|\alpha - i\beta|^2)$$

这里内积定义为 $(\alpha, \beta) = \alpha^* G \beta$，$G$为复正定阵

证：等式右边一一展开即可，注意共轭线性性即可

对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 及 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 有

$$(\lambda\alpha + \mu\beta, \gamma) = \bar{\lambda}(\alpha, \gamma) + \bar{\mu}(\beta, \gamma), (\gamma, \lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda(\gamma, \alpha) + \mu(\gamma, \beta)$$

有 $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + (\beta, \beta)$

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)-(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha)$$

$$|\alpha+i\beta|^2=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+i(\alpha,\beta)-i(\beta,\alpha)$$

$$|\alpha-i\beta|^2=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)-i(\alpha,\beta)+i(\beta,\alpha)$$

逐个代入即得结果

3．计算（10）

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\0&0\end{pmatrix}$ 的奇异值分解的具体形式

解：

先给出一般化方法：

对于一个秩为 r 的矩阵 $A_{m\times n}$ ，必存在 $m\times m$ 的正交矩阵 $U_{m\times m}, n\times n$ 的正交矩阵 $V_{n\times n}, m\times n$ 的矩阵 $\Sigma_{m\times n}$ ，使得

$$A_{m\times n}=U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}^T=U_{m\times m}\begin{pmatrix}D_{r\times r}&O\\O&O\end{pmatrix}_{m\times n}V_{n\times n}^T$$

其中，$D_{r\times r}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}_{r\times r}$

$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_r>0$ 为 A^TA的 r 个非零特征值（从大到小排列）

第一步：求出 $A_{m\times n}^TA_{m\times n}$ （一般我们先求阶数小的）的 n 个特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0$（并按照从大到小排列）和对应的**标准正交**的特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n$ 。

第二步：取标准正交的特征向量构成正交矩阵

$$V_{n\times n} = (v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)_{n\times n}$$

取前 r 个奇异值，即非零特征值**开根号** $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}$ ，构成对角矩阵

$$D_{r\times r} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix}_{r\times r}$$

添加额外的 0 组成 $m \times n$ 的矩阵

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{pmatrix} D_{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & O \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & O & & & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

第三步：构成前 r 个标准正交向量 $u_1, u_2, \cdots, u_r$

其中 $\boldsymbol{u_i} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda_i}}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_i}$, $i = 1,2, \cdots, r$

第四步：按照标准正交基扩充的方法，将 $u_1, u_2, \cdots, u_r$扩充为 m 维向量空间 $\mathbb{R}^m$的标准正交基 $u_1, u_2, \cdots, u_r, b_1, \cdots, b_{m-r}$ ，组成正交矩阵

$$U_{m\times m} = (u_1, u_2, \cdots, u_r, b_1, \cdots, b_{m-r})_{m\times m}$$

最后注意**转置** $\boldsymbol{V_{n\times n}^T}$ 即可

对本题我们有

$A^TA=\begin{pmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{pmatrix}$ 有特征值 $15\pm\sqrt{221}$

那么奇异值为 $\sqrt{15\pm\sqrt{221}}$

$\lambda=15+\sqrt{221}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix}-10+\sqrt{221}\\ 11\end{pmatrix}$

$\lambda=15-\sqrt{221}$ 有特征向量 $\begin{pmatrix}-10-\sqrt{221}\\ 11\end{pmatrix}$

注意到对称阵的不同特征值对应的特征向量正交，我们就得到了

$$V=\begin{pmatrix}\frac{-10+\sqrt{211}}{\sqrt{442-20\sqrt{211}}} & \frac{-10-\sqrt{211}}{\sqrt{442+20\sqrt{21}}}\\ \frac{11}{\sqrt{442-20\sqrt{221}}} & \frac{11}{\sqrt{442+20\sqrt{221}}}\end{pmatrix}$$

并有 $\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{15+\sqrt{221}} & 0\\ 0 & \sqrt{15-\sqrt{221}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

进而 $U=\begin{pmatrix}\frac{-5+\sqrt{221}}{\sqrt{442-10\sqrt{221}}} & \frac{-5-\sqrt{221}}{\sqrt{442+10\sqrt{221}}} & 0\\ \frac{14}{\sqrt{442-10\sqrt{221}}} & \frac{14}{\sqrt{442+10\sqrt{221}}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4．A 为一个 $n\times n$ 的矩阵，证明 $\dim F[A]=n$ 当且仅当最小多项式等于特征多项式

证：书上定理 3.5.10 向量组 $\{I_n, A, \cdots, A^{d-1}\}$ 是线性空间 $F[A]$ 的一组基.

（证：只需证明 $\{I_n, A, \cdots, A^{k-1}\}$ 线性无关即可. 否则，设 λ_i 不全为 0 使得 $\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i A^i = 0$. 令 $g(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i x^i$ ，则 $g(x)$ 是次数 $\le k-1$ 的多项式. 对于任意 $f(x) \in F[x]$ ，根据多项式的带余除法，$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ ，其中 $\deg(r) < \deg(g) \le k-1$. 故 $f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A)$. 这说明 $f(A)$ 都是 $\{I_n, \cdots, A^{k-2}\}$ 的线性组合，与 $\dim F[A] = k$ 矛盾.）

本题是这个定理的直接推论

有 $\dim F[A] = \deg d_A(x)$

再由 Cayley—Hamilton 定理 $d_A(x) | \varphi_A(x)$ 以及 $\deg \varphi_A(x) = n$

且 $d_A(x)$，$\varphi_A(x)$均首一

就得到本题结果

5. 设矩阵 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 K^{1958} 和 K^{2025} （需要化简）（10）

解一：注意到 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ 为旋转变换对应方阵的常数倍

$$\Rightarrow K^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow K^{1958}=2^{979}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad K^{2025}=2^{1012}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

解二：考虑 Jordan 标准型

$\lambda=1+i$ 有特征向量 $\binom{-i}{1}$

$\lambda=1-i$ 有特征向量 $\binom{i}{1}$

那么 $P^{-1}kP=J$ 其中

$$J=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{i}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

处理 J 的 n 次幂我们有两种方法

法一：$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad 1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

那么 $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{in\frac{\pi}{4}} \quad (1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{in\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

法二：$(1+i)^2=2i \quad (1-i)^2=-2i \quad i^4=1$

同样得到 $K^{1958}=2^{979}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 与 $K^{2025}=2^{1012}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

6．判断正误，错误的举出反例，正确的证明之（10）

（1）A^2 规范，A 规范。

（2）A 与 AA^T 交换， A 规范。

（1）错误，反例 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad A^2=0$

（2）正确

证一：设 $B=AA^T-A^TA$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(BB^T) &= \operatorname{tr}\left((AA^T-A^TA)^2\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\underline{AA^TAA^T}-AA^TA^TA-\underline{A^TAAA^T}+A^TAA^TA\right)\\ &= \operatorname{tr}(A^TAA^TA-AA^TA^TA)\\ &= \operatorname{tr}(A^TA^TAA-AA^TA^TA)\\ &= 0\end{aligned}$$

因为 B 是实矩阵，所以 $B=O=AA^T-A^TA$ ，即 A 是规范阵.

证二：若A可逆，结论自然成立

当A不可逆时，存在正交阵 P 使得 $P^{-1}A^TAP=D=\operatorname{diag}(D_1,0)$

其中 $D_1=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ 可逆

令 $B=P^{-1}AP=P^TAP$

那么$B^TB=D$ 且 B与B^TB 可交换

分块有$B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$

则 $BD=\begin{pmatrix}B_{11}D_1 & 0\\ B_{21}D_1 & 0\end{pmatrix}=DB=\begin{pmatrix}D_1B_{11} & D_1B_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

D_1 可逆 $\Rightarrow B_{12}=B_{21}=0$

又 $B^TB=D=\operatorname{diag}\left({B_{11}}^TB_{11},B_{22}^TB_{22}\right)=\operatorname{diag}(D_1,0)$ 且D_1可逆

$\Rightarrow B_{22}=0$，B_{11} 可逆 且 B_1 与 $B_1^TB_1$ 可交换，再由可逆情况

$\Rightarrow B^T B = BB^T \Rightarrow A^T A = AA^T$

7．计算 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2)$ 的最小多项式，Jordan 标准型，实相似标准型。（20）

其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解：先说明要用的定理：

（1）准对角阵的最小多项式是对角块的最小多项式的最小公倍式

（2）特征方阵的初等因子与 Jordan 块是一一对应的，初等因子

$(x-\lambda)^n$ 对应 Jordan 块 $J_n(\lambda)$

（3）准对角阵的初等因子是对角块的初等因子的并

我们只需要分别求出A_1, A_2的最小多项式与 Jordan 标准型即可

先注意到A_2是友阵，那么 $d_{A_2}(x) = x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

且A_2的 Jordan 标准型为 $J_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, i, -i)$

注意到A_1的 Jordan 标准型比特征方阵的初等因子更好求，我们求其 Jordan 标准型

A_1只有特征值 1，且$r(A_1 - I) = 2 \quad r(A_1 - I)^2 = 0$

其 Jordan 标准型为 $J_1=\operatorname{diag}(J_2(1),J_2(1))$

那么就有$d_{A_1}(x)=(x-1)^2$

最后得到结果：

最小多项式为 $d_A(x)=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$

Jordan 标准型为 $J=\operatorname{diag}(J_2(1),J_2(1),-1,1,-i,i)$

实相似标准型只需要把虚数部分替换即可

为 $\operatorname{diag}\left(J_2(1),J_2(1),-1,1,\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$

8．在空间 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性空间上的线性函数 $f(X)$ ，证明对于固定的 $f(X)$ ，有唯一的矩阵 B 满足 $f(X)=\operatorname{Tr}(XB^T)$ 。（10）

证：存在性：$\mathbb{R}^{n\times n}$有一组基$M=\{E_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n\}$.

设 $X=(a_{ij})_{n\times n}$

$f(X)\ =f(a_{11}E_{11}+\cdots+a_{nn}E_{nn})\ =a_{11}f(E_{11})+\cdots+a_{nn}f(E_{nn})$

设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$

$\operatorname{Tr}(\ XB^T)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\cdots+a_{nn}b_{nn}$

令 $b_{ij}=f(E_{ij})$ 即可

唯一性：若存在B_1,B_2使得 $f(X)=\mathrm{Tr}\left(XB_1^T\right)=\mathrm{Tr}\left(XB_2^T\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(X(B_1-B_2)^T)=0$

取 $X=B_1-B_2=\left(x_{ij}\right)_{n\times n}$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left((B_1-B_2)(B_1-B_2)^T\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_{ij}^2=0$

$\Rightarrow B_1-B_2=0$ 即 $B_1=B_2$

9 正交阵 $O=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$

A 为方阵，那么 D 也为方阵，证明 $\det(A)^2=\det(D)^2$

证：$OO^T=I$ 即 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^T & C^T\\ B^T & D^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}$.

有 $AA^T+BB^T=I_n$

$D^TD+B^TB=I_m$

证一：$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^T & 0\\ B^T & I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$

取行列式 $\det(O)\det(A)=\det(D)$

又 $\det(O)^2=1$

两边平方 $\Rightarrow \det(A)^2=\det(D)^2$

证二：$\det(A)^2=\det(AA^T)=\det(\mathrm{I_n}-BB^T)=\det(\mathrm{I_m}-B^TB)$

$= \det(D^T D) = \det(D)^2$

这里利用了结论$|\lambda I_n - BA| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - AB|$