线性代数 A2 期中考试

2024 年 11 月 6 日 9:45—11:45，5301 教室

姓名__________________ 学号________________________ 得分__________________

说明：禁止使用课本习题或其他参考书中的结论.

一、填空题．每空 5 分，共 25 分．结果需化简，写在空格处.

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 是正定的，则 a 的取值范围是 __________________.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$，$x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$，$x^T x = 1$，则 $x^T A x$ 的最小值是__________.

3. 实二次型 $Q(x_1, \cdots, x_{2024}) = \sum\limits_{i=1}^{2023} x_i x_{i+1}$ 的正、负惯性指数分别是 ______________.

4. 设实线性空间 V 中向量 e_1, e_2, e_3, e_4 线性无关，
则向量组 $\{e_i + e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}$ 共有________________ 个极大线性无关向量组.

5. 从 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的基 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
到基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 _____________________.

二、简答题．每题 6 分，共 30 分．判断下列叙述是否正确，并简要说明理由.

1. 设 A 是 n 阶对称实方阵，$\mathbb{R}^{n\times 1}$ 的子空间 $V \subset \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid x^T A x = 0\}$，则 $\dim V \leqslant n - \operatorname{rank}(A)$.

2. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$V_1$ 是 A 的行向量组生成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，V_2 是 A 的列向量组生成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $V_1 = V_2$.

3. 设 U 是线性空间 V 的子空间，并且 $U \neq V$，则 U 与 V 不同构.

4. 设 V_1, V_2, V_3 是线性空间 V 的子空间，则 $(V_1 + V_3) \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + V_3$.

5. 设 V_1, V_2, V_3 是线性空间 V 的子空间，并且 $V_1 + V_2$, $V_1 + V_3$, $V_2 + V_3$ 都是直和，则 $V_1 + V_2 + V_3$ 是直和.

三、解答题．每题 15 分，共 45 分．需给出详细解答和证明过程．

1. 设 n 阶对称实方阵 $A = (a_{ij})$ 是正定的．证明：$\det(A) \leqslant \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_{kk}$．并给出等号成立的充分必要条件．

2. 设 $S_1 = \{\sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(5x)\}$，$S_2 = \{\sin x, \sin^2 x, \cdots, \sin^5 x\}$ 是实线性空间 $\mathscr{C}[0, 2\pi]$ 中向量组，$V_1 = \mathrm{Span}(S_1)$，$V_2 = \mathrm{Span}(S_2)$．分别求 V_1、V_2、$V_1 + V_2$、$V_1 \cap V_2$ 的基和维数．

3. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，U 是 $V_1 \cap V_2$ 的子空间．证明：
   (1) $(V_1 + V_2)/U = (V_1/U) + (V_2/U)$．
   (2) $(V_1 + V_2)/U = (V_1/U) \oplus (V_2/U)$ 当且仅当 $V_1 \cap V_2 = U$．

参考答案与评分标准

一、　$(1,+\infty)$，　$\dfrac{1}{2}$，　$(1012,1012)$，　12，　$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

二、　每小题判断 1 分，理由 5 分.

1. 错误. 例如，$A=\operatorname{diag}(1,-1,0)$，$V=\operatorname{Span}((1,1,0)^T,(0,0,1)^T)$.
2. 错误. 例如，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$V_1\neq V_2$.
3. 错误. 例如，$V=\mathbb{F}[x]$ 与 $U=\{xf(x)\mid f\in V\}$ 同构.
4. 错误. 例如，设 e_1,e_2,e_3,e_4 线性无关，$V_1=\operatorname{Span}(e_1,e_2)$，$V_2=\operatorname{Span}(e_3,e_4)$，$V_3=\operatorname{Span}(e_1+e_3,e_2+e_4)$，则 $V_1+V_3=V_2+V_3=\operatorname{Span}(e_1,e_2,e_3,e_4)$，$V_1\cap V_2=O$.
5. 错误. 例如，设 e_1,e_2 线性无关，$V_1=\operatorname{Span}(e_1)$，$V_2=\operatorname{Span}(e_2)$，$V_3=\operatorname{Span}(e_1+e_2)$.

三、

1. 设 $A=\begin{pmatrix}A_1 & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}$. 由 A 正定，可得 $\det(A)>0$，A_1 正定，A_1^{-1} 正定.　(5 分)
   故 $\det(A)=\det(A_1)(a_{nn}-\alpha^TA_1^{-1}\alpha)\leqslant\det(A_1)a_{nn}$，等号成立 $\Leftrightarrow\alpha=\mathbf{0}$.　(5 分)
   对 n 归纳，得 $\det(A)\leqslant a_{11}\cdots a_{nn}$，等号成立 $\Leftrightarrow A$ 是对角阵.　(5 分)

2. 设 $\sum\limits_{k=1}^{5}a_k\sin(kx)=0$. 多次求导，得 $\sum\limits_{k=1}^{5}k^ta_k\sin(kx)=0$，$t=0,2,4,6,8$.
   解得 $a_k=0$，$\forall k$. 故 S_1 线性无关，是 V_1 的基，$\dim V_1=5$.　(3 分)
   设 $\sum\limits_{k=1}^{5}b_k\sin^kx=0$. 取 $x=x_1,\cdots,x_5$ 使得 $\sin x_1,\cdots,\sin x_5$ 两两不同.
   解得 $b_k=0$，$\forall k$. 故 S_2 线性无关，是 V_2 的基，$\dim V_2=5$.　(3 分)
   由 $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3x$，$\sin(5x)=5\sin x-20\sin^3x+16\sin^5x$，
   可得 $\operatorname{Span}(\sin x,\sin(3x),\sin(5x))=\operatorname{Span}(\sin x,\sin^3x,\sin^5x)\subset V_1\cap V_2$.　(3 分)
   由 $\sin x,\sin(2x),\cdots,\sin(5x)$ 都是奇函数，$\sin^2x,\sin^4x$ 都是偶函数，
   可得 $S_1\cup\{\sin^2x,\sin^4x\}$ 线性无关，是 V_1+V_2 的基，$\dim(V_1+V_2)=7$.　(3 分)
   根据维数定理，$\dim(V_1\cap V_2)=3$. 故 $\{\sin x,\sin(3x),\sin(5x)\}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基.　(3 分)

3. (1) 由 $V_i/U\subset(V_1+V_2)/U$，得 $(V_1/U)+(V_2/U)\subset(V_1+V_2)/U$. 对于任意 $[\alpha]\in(V_1+V_2)/U$，由 $\alpha=v_1+v_2$，其中 $v_i\in V_i$，得 $[\alpha]=[v_1]+[v_2]\in(V_1/U)+(V_2/U)$. 综上，$(V_1/U)+(V_2/U)=(V_1+V_2)/U$.　(6 分)
   (2) 对于任意 $[\alpha]\in(V_1/U)\cap(V_2/U)$，由 $[\alpha]\in V_i/U$，得 $\alpha\in V_i$，从而 $\alpha\in V_1\cap V_2$. 反之，若 $\alpha\in V_1\cap V_2$，则 $[\alpha]\in(V_1/U)\cap(V_2/U)$.　(6 分)
   故 $(V_1/U)+(V_2/U)$ 是直和 $\Leftrightarrow(V_1/U)\cap(V_2/U)=(V_1\cap V_2)/U=O\Leftrightarrow V_1\cap V_2=U$.　(3 分)