答题时不要超

2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

3. 以下六题任选五题，并在选择的题号上打勾。

得分	评卷人

一（本题20分）给定n阶方阵$A=(a_{ij})$，其中$a_{ij}=\begin{cases} j-i, & i<j \\ 0, & i\geq j \end{cases}$. 求$A^3$的Jordan标准形.

$A = E + 2E^2 + \cdots (n-1)E^{n-1}$　　$A^3 = E^3 + a_4 E^4 + \cdots a_{n-1} E^{n-1}$　$(a_i > 0)$

则 A^3 特征值均为0，且 $\cancel{A^3 \neq 0}$ $\operatorname{rank} A^3 = n-3$

$(A^3)^2 = E^6 + a_7' E^7 + \cdots$　　$\operatorname{rank} A^6 = n-6$ $\cdots$

故 ① $n=3k$　$A^3 \sim \begin{bmatrix} J_k(0) & & \\ & J_k(0) & \\ & & J_k(0) \end{bmatrix}$　② $n=3k+1$　③ $n=3k+2$

$A^3 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_3(0) \end{bmatrix}$　$A^3 \sim \begin{bmatrix} J_{k+1}(0) & & \\ & J_k(0) & \\ & & J_k(0) \end{bmatrix}$　$A^3 \sim \begin{bmatrix} J_{k+1}(0) & & \\ & J_{k+1}(0) & \\ & & J_k(0) \end{bmatrix}$

得分	评卷人

二（本题20分）设数列$\{a_n\}$ 满足递推关系式：$a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n$，$n \geq 1$. 已知$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$，利用矩阵的Jordan标准形求数列$\{a_n\}$ 的通项公式.

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$A: \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ & \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = (3-\lambda)\cdot(-\lambda) - 2 = 0$$

$$2.\ \begin{bmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} (-1)^n & \overset{(-1)^{n+1}}{\underset{2\times(-1)^{n+1}}{n+9}} & 4\times 2^n \\ & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$a_{n+3} = -\frac{1}{9}\left(\overset{(-1)^{n+1}-3n-6\times(-1)^{n+1}}{\cancel{1-3n-6}} - 32\times 2^n\right) = \frac{2^{n+5}+3n+5\ldots}{9} \quad (n \geq 0)$$

$$= \frac{1}{9}\left(2^{n+5}+3n \overset{-5\times(-1)^n}{+(\ldots)^n}\right)$$

得分	评卷人

三、（本题20分）设$2n$阶实方阵A满足$A^2+A+I_{2n}=O$. 求A的实相似标准形.

设λ为A的特征值，则 $\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

即 $(A+\frac{\sqrt{5}-1}{2}I)(A+\frac{1+\sqrt{5}}{2}I)=0$

① 由于A是实矩阵，故 $d_A(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$

故A的Smith标准形

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda^2+\lambda+1 & \\ & & & \lambda^2+\lambda+1 \end{bmatrix}$$

故 $A \sim \begin{bmatrix} a & b & & & & & \\ -b & a & & & & & \\ & & a & b & & & \\ & & -b & a & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a & b \\ & & & & & -b & a \end{bmatrix}$ $a=-\frac{1}{2}$ $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

得分	评卷人

四、（本题20分）设A、B均为3阶数方阵，并且它们有相同的特征多项式与最小多项式，即 $\varphi_A(\lambda)=\varphi_B(\lambda)$, $d_A(\lambda)=d_B(\lambda)$. 证明：A与B相似．并举例说明，结论对4阶方阵不成立.

① 有3个单重特征值 $\Rightarrow$ A与B相似于对角 $A\sim B$

② 有一个2重，一个一重 $\Rightarrow \varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$

$$d_A(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\\(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$A\sim B\sim\begin{cases}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\lambda_1&1&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

③ 一个3重 则 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3$

$$d_A(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-\lambda_1) & \begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_1\end{bmatrix}\\(\lambda-\lambda_1)^2 & \begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_1\end{bmatrix}\\(\lambda-\lambda_1)^3 \longrightarrow & \begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\&\lambda_1&1\\&&\lambda_1\end{bmatrix}\end{cases}$$

故 $A\sim B$

反例 $\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$

得分	评卷人

五、（本题20分）设A为n阶复方阵. 证明: "对任意正整数$k \geq 2$, A与A^k相似" 的充要条件是, A的非零特征值均为1 且$r(A) = r(A^2)$.

"⇒" A与B相似, 则A与B有相同特征值

设A特征值$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 由于 $Ax = \lambda_1 x$

则A^k特征值$\{\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k\}$ $\Rightarrow A^k x = \lambda_1^k x$

故 λ_i^k 是A特征值对$\forall k$成立 $\Rightarrow \lambda_i = 0, \pm 1$

若$\exists \lambda_i = -1$

则~~A有~~ -1 是A^2特征值 $|A^2+I| = |(A+iI)(A-iI)| \neq 0$ 矛盾!

$r(A) = r(A^2)$ 显然

"⇐" 设A有t个0特征值 n-t个1特征值

由于$r(A)=r(A^2)$ 所以A的所有0 Jordan块均为1阶

故不妨设$|A| \neq 0$, 即A的特征值全为1, $A = [J_{k_1}(1) \cdots J_{k_s}(1)]$

只需证对$\forall n, \forall k \geq 2$ $J_n(1) \sim J_n(1)^k$ 而$J_n(1)^k = \begin{bmatrix} 1 & C_k^1 & \cdots & C_k^k & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ $k<n$

$\begin{bmatrix} 1 & C_k^1 & \cdots & C_k^n \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $k>n$

有 $\mathrm{rank}\, J_n(1)^k = n$

$\mathrm{rank}(J_n(1)^k - I) = n-1$ $\Rightarrow J_n(1)^k \sim J_n(1)$

$\vdots$

$\mathrm{rank}(J_n(1)^k - I)^l = n-l$

答题时不要超过此线

得分	评卷人

六、（本题20分）设V是数域F上的线性空间，$\mathcal{A}$是V上的线性变换，α是V中的非零向量，且α的最小多项式$d_{\mathcal{A},\alpha}(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中$f_1,f_2\in F[x]$为互素的首一多项式．证明：存在$V$中的非零向量$\alpha_1$、$\alpha_2$满足

1．$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$；　2．$d_{\mathcal{A},\alpha_i}(x)=f_i(x)$．$i=1,2$；　3．$F[\mathcal{A}]\alpha=F[\mathcal{A}]\alpha_1\oplus F[\mathcal{A}]\alpha_2$．

$\exists\, \mu, \nu \in F(x)$　　$f_1(x)\mu(x)+f_2(x)\nu(x)=1$

$$\Rightarrow f_1(A)\mu(A)+f_2(A)\nu(A)=Id$$

设 $\alpha_1=f_2(A)\mu(A)\alpha$　　$\alpha_2=f_1(A)\mu(A)\alpha_2$

则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

且 ~~d_{A,α_i}~~ $f_i(A)\alpha_i=0 \Rightarrow d_{A,\alpha_i}(x) \mid f_i(x)$

但设 $d_{A,\alpha_i}(x)=g_i(x)$，则　$g_1(A)\,g_2(A)(\alpha)=0$

$g_i(x) \mid f_i(x)$　　$\Rightarrow f_1(x)f_2(x) \mid g_1(x)g_2(x)$

$\Downarrow$

$g_1(x)=f_1(x)$　$g_2(x)=f_2(x)$

3. 先证明是直和　$\exists\, h_1(x), h_2(x) \in F(x)$

$h_1(A)\alpha_1=h_2(A)\alpha_2$

$\Rightarrow f_1(A)h_2(A)\alpha_2=0 \Rightarrow f_2(x) \mid f_1(x)h_2(x)$

$\Rightarrow f_2(x) \mid h_2(x)$

$\Rightarrow h_2(A)\alpha_2=0$

故由于 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$

又 $F(A)\alpha=F(A)\alpha_1+F(A)\alpha_2=F(A)\alpha \oplus F(A)\alpha_2$.