中 国 科 学 技 术 大 学

2024 – 2025 学年第一学期期末考试试卷

课程名称 线性代数(A2)　　课程编号 MATH1005

考试时间 2025年01月13日　　考试形式 闭卷

学院 ________　　姓名 ________　　学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

答题时不要超过此线

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

得分	评卷人

一（本题20分）填空题, 以下试题任选4题(请在题号上打勾), 每题5分.

1. 复方阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&i\\0&i&-2\end{pmatrix}$的相合规范型为________.

2. 设实二次型$Q(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2\lambda xy-2yz$正定, 则$\lambda$的范围是________.

3. 设实数x,y,z满足$x^2+(y+2z)^2+(z+x)^2\le 3$，则$y$的最大值是________.

4. 方阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$的奇异值为________.

5. 设$V=F^3$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^TA\mathbf{y}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 则$V$在$f$下的左根基的一组基为________.

6. 设V是数域F上的线性空间, V^*是其对偶空间. 设$\alpha,\beta\in V$, $f,g,h\in V^*$. 令$T=f\otimes g\otimes h\otimes\alpha\otimes\beta$, Tr是收缩算子. 则$Tr_1^2(T)=$____________________.

以下五题任选四题, 多做不加分. 其中第二题是Math1005.01课堂未参加期中考试的同学必选试题.

得分	评卷人

二（本题20分）设n维线性空间V上的线性变换$\mathcal{A}$满足$\mathcal{A}^n=\mathcal{O}$. 求证：$V$可以分解为若干$\mathcal{A}$的循环子空间的直和.

得分	评卷人

三（本题20分）设$\mathbb{R}_n[x]$ 是次数不超过n的实系数多项式按内积$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$构成的欧氏空间.

1. 从$\{1, x, x^2, x^3\}$ 构造$\mathbb{R}_3[x]$的一组标准正交基.
2. 求$f(x) = x^4$到$\mathbb{R}_3[x]$的正交投影.

答题时不要超过此线

得分	评卷人

四、（本题20分）设Euclid空间$V=\mathbb{R}^{3\times 3}$的内积$(X,Y)=Tr(X^TSY)$，其中$S=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. 设$V$上的线性变换$\mathcal{A}(X)=XA$, 这里$A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(1) 求所有A使得$\mathcal{A}$是正交变换;

(2) 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}$，求$\mathcal{A}$的伴随变换.

得分	评卷人

五、（本题20分）设$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$**都是实对称半正定方阵．证明：** $Tr((A+B)^3) \geq Tr(A^3)+Tr(B^3)$**．**

答题时不要超过此线

得分	评卷人

六、（本题20分）设n维Euclid空间V上的线性变换$\mathcal{A}$满足：若$(\alpha,\beta) = 0$，则$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta) = 0$．求证：存在$V$上的正交变换$\mathcal{P}$和实数$\lambda$使得$\mathcal{A} = \lambda\mathcal{P}$．

参考答案与评分标准

一 (每空 5 分，选做 4 题)

① $\mathrm{diag}(1,1,0)$ ② $|\lambda|<\sqrt{\frac{5}{3}}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $\sqrt{6},\sqrt{6}$ ⑤ $(-2,1,1)$ ⑥ $f(\beta)g\otimes h\otimes\alpha$

二 对 n 归纳．当 $n=1$ 时，结论显然成立．当 $n\geqslant 2$ 时，$\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})\leqslant n-1$，根据归纳假设，存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\operatorname{Im}\mathcal{A}$，使得 $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\alpha_i$． (5 分)

设 $\alpha_i=\mathcal{A}\beta_i$．对于任意 $v\in V$，由 $\mathcal{A}v=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}f_i(\mathcal{A})\alpha_i$ 得 $v-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}f_i(\mathcal{A})\beta_i\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}$．故

$V=\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta_i\right)+\operatorname{Ker}\mathcal{A}$． (5 分)

从而，存在 $\beta_{k+1},\cdots,\beta_{k+l}\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 线性无关，使得

$V=\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta_i\right)\bigoplus\operatorname{Span}(\beta_{k+1},\cdots,\beta_{k+l})$． (5 分)

由 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\alpha_i$ 是直和，得 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta_i$ 也是直和，故 $V=\bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant k+l}\mathbb{F}[\mathcal{A}]\beta_i$． (5 分)

三 (1) $(f,g)=\int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)d\theta$．$\{1,\cos\theta,\cdots,\cos(n\theta)\}$ 为 $\mathbb{R}_n[\cos\theta]$ 的正交基．得 $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\sqrt{\frac{2}{\pi}}x,\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2-1),\sqrt{\frac{2}{\pi}}(4x^3-3x)\right\}$ 为 $\mathbb{R}_3[x]$ 的标准正交基． (10 分)

(2) $\cos^4\theta=\frac{1}{8}(3+4\cos(2\theta)+\cos(4\theta))$ 在 $\mathbb{R}_3[\cos\theta]$ 上的正交投影为 $\frac{1}{8}(3+4\cos(2\theta))$．得 x^4 在 $\mathbb{R}_3[x]$ 上的正交投影为 $\frac{1}{8}(3+4(2x^2-1))=x^2-\frac{1}{8}$． (10 分)

四 (1) $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Leftrightarrow (XA,YA)=(X,Y)\Leftrightarrow \operatorname{Tr}(A^TX^TSYA)=\operatorname{Tr}(X^TSY)\Leftrightarrow \operatorname{Tr}(AA^TX^TSY)=\operatorname{Tr}(X^TSY)$．由 X^TSY 可取遍 V，得 $AA^T=I$． (10 分)

(2) $(\mathcal{A}(X),Y)=(X,\mathcal{A}^*(Y))\Leftrightarrow\operatorname{Tr}(A^TX^TSY)=\operatorname{Tr}(X^TS\mathcal{A}^*(Y))\Leftrightarrow\operatorname{Tr}(X^TSYA^T)=\operatorname{Tr}(X^TS\mathcal{A}^*(Y))$．由 X^TS 可取遍 V，得 $\mathcal{A}^*(Y)=YA^T$． (10 分)

五 由 $(A+B)^3=A^3+A^2B+ABA+BA^2+AB^2+BAB+B^2A+B^3$， (6 分)

得 $\operatorname{Tr}(A+B)^3-\operatorname{Tr}(A^3)-\operatorname{Tr}(B^3)=3\operatorname{Tr}(ABA+BAB)$， (8 分)

其中 ABA 和 BAB 都是实对称半正定方阵，$\operatorname{Tr}(ABA+BAB)\geqslant 0$． (6 分)

六 不妨设 $\mathcal{A}\neq\mathcal{O}$，则存在非零向量 $u\in V$ 使得 $\lambda=\dfrac{|\mathcal{A}u|}{|u|}>0$． (2 分)

对于任意 $v\in V$，设 $\alpha=v+\dfrac{|v|}{|u|}u$，$\beta=v-\dfrac{|v|}{|u|}u$， (6 分)

则 $(\alpha,\beta)=0\Rightarrow(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=0\Rightarrow|\mathcal{A}v|=\lambda|v|$． (6 分)

从而，$\mathcal{P}=\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}$ 是正交变换． (6 分)