（装订线内不要答题）

中国科学技术大学数学科学学院
2023～2024 学年第 2 学期考试试卷（B）

课程名称：线性代数 A1　课程代码：MATH1004

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题号	一(15 分)	二(20 分)	三(15 分)	四(15 分)	五(20 分)	六(15 分)	总分
得分							

说明：需给出详细解答和证明过程，结果须化简．禁止引用课本习题或其他参考书中的结论．禁止使用手机、计算器等电子设备．

一、求多项式矩阵$\begin{pmatrix} 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ 1+x^2 & 1+x^3 & 1+x^4 \\ 1+x^3 & 1+x^4 & 1+x^5 \end{pmatrix}$的 Smith 标准形．

二、设实方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求A的特征多项式与最小多项式；

（2）求可逆方阵P及对角阵Λ，使得$A=P\Lambda P^{-1}$；

（3）求e^A．这里$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

三、（1）求证：若 3 阶复方阵A,B有相同的特征多项式和最小多项式，则A与B相似．

（2）举例：复方阵A与B不相似，但A,B有相同的秩、特征多项式和最小多项式．

四、设$A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{20\times 20}$，其中$a_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ 0, & i\geq j\end{cases}$. 分别求$A$、$A^2$、$A^3$的 Jordan 标准形.

五、设实方阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

（1）求正交方阵P和对角元素皆正的下三角方阵L，使得$A=PL$；

（2）证明：上述P和L是唯一的.

六、设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{C}$是$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$的所有特征值，$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$是$A$的所有奇异值. 求证：

（1）$\lambda_1+\cdots+\lambda_n\leq\sigma_1+\cdots+\sigma_r$；

（2）$|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2\leq\sigma_1^2+\cdots+\sigma_r^2$.

参考答案和评分标准

一、作初等变换，$\begin{pmatrix}1+x & 1+x^2 & 1+x^3\\ 1+x^2 & 1+x^3 & 1+x^4\\ 1+x^3 & 1+x^4 & 1+x^5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1+x & 1+x^2 & 1+x^3\\ x^2-x & x^3-x^2 & x^4-x^3\\ x^3-x^2 & x^4-x^3 & x^5-x^4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1+x & 1+x^2 & 1+x^3\\ x^2-x & x^3-x^2 & x^4-x^3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1+x & 1-x & 1-x\\ x^2-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1+x & 1-x & 0\\ x^2-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}2 & 1-x & 0\\ x^2-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1-x & 0\\ 0 & \frac{1}{2}x(x-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x(x-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. （15 分）

二、$\varphi_A = x^3-27x-54=(x-6)(x+3)^2$. （5 分）

特征值$\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=-3$．相应特征向量$\alpha_1=(2,-1,2)^T$，$\alpha_2=(1,2,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,1)^T$．设$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，则$A=P\Lambda P^{-1}$. （5 分）

$d_A=d_\Lambda=(x-6)(x+3)$. （2 分）

$e^\Lambda=\mathrm{diag}(e^6,e^{-3},e^{-3})$，$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, （4 分）

$e^A=Pe^\Lambda P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4e^6+5e^{-3} & -2e^6+2e^{-3} & 4e^6-4e^{-3}\\ -2e^6+2e^{-3} & e^6+8e^{-3} & -2e^6+2e^{-3}\\ e^6-e^{-3} & -2e^6+2e^{-3} & 4e^6+5e^{-3}\end{pmatrix}$. （4 分）

三、（1）若$\deg(d_A)=3$，则$d_A=\varphi_A$，A相似于d_A的友方阵C. （3 分）

若$\deg(d_A)=2$，设$\frac{\varphi_A(x)}{d_A(x)}=x-a$，则$A$相似于$\mathrm{diag}(C,a)$，$C$是$d_A$的友方阵. （3 分）

若$\deg(d_A)=1$，设$d_A(x)=x-a$，则A相似于aI_3. （3 分）

（2）$A=\mathrm{diag}(J_3(0),J_3(0),0)$与$B=\mathrm{diag}\big(J_3(0),J_2(0),J_2(0)\big)$不相似，

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=4$，$\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=x^7$，$d_A(x)=d_B(x)=x^3$. （6 分）

四、$\varphi_A=x^{20}$，A的特征值都是 0，几何重数 1，故$A\sim J_{20}(0)$. （5 分）

$B=A^2$满足$\mathrm{rank}(B^k)=\max(20-2k,0)$，$B\sim\mathrm{diag}(J_{10}(0),J_{10}(0))$. （5 分）

$C=A^3$满足$\mathrm{rank}(C^k)=\max(20-3k,0)$，$C\sim\mathrm{diag}(J_7(0),J_7(0),J_6(0))$. （5 分）

五、（1）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$．对$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$作 Gram-Schmidt 标准正交化，得$\beta_1=\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$，$\beta_3=\alpha_1-\frac{1}{2}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$.（7 分）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{3}&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&0&0\\0&\frac{\sqrt6}{2}&0\\0&0&\frac{2}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{3}&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&0\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt3}&0&0\\\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&\sqrt2\end{pmatrix}=PL.$$（8 分）

（2）若$A=P_1L_1=P_2L_2$，则$P_2^{-1}P_1=L_2L_1^{-1}$既是正交方阵、又是下三角方阵、并且对角元素皆正，故$P_2^{-1}P_1=L_2L_1^{-1}=I$.（5 分）

六、（1）设$A=P\Sigma Q$是奇异值分解，由正交方阵的对角元素皆$\in[-1,1]$，（4 分）

得$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\Sigma QP)\le\mathrm{tr}(\Sigma)=\sigma_1+\cdots+\sigma_r$.（4 分）

（2）根据 Schur 定理，存在酉方阵U，使得$B=U^{-1}AU$是上三角方阵，其中B的对角元素为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.（3 分）

故$\sigma_1^2+\cdots+\sigma_r^2=\mathrm{tr}(A^HA)=\mathrm{tr}(B^HB)\ge|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$.（4 分）