USTC2024秋概率论期中试题 2024年11月8日

姓名: 学号: 分数:

1. **(15分)** 掷两枚均匀硬币，详细写出概率空间三要素，并说明其上存在两个独立的随机变量.
2. **(15分)** **2024年8月4日, 在巴黎奥运会乒乓球男单决赛中, 樊振东以4:1击败瑞典选手 莫雷高德, 夺得个人首枚奥运男单金牌.** 回答下面问题：
   已知对决中 **樊振东**的胜率高于莫雷高德，试问 “3 局 2 胜制” 和 “5 局 3 胜制”哪一种竞赛规则对 **樊振东**更有利? 说明理由.
3. **(15分)** 若随机向量(X,Y)在单位圆盘$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$内均匀分布，求$X$和$Y$的概率密度函数. X和Y相互独立吗？
4. **(10分)** 设 G_1,G_2 是概率母函数, 证明 G_1G_2 和 $\alpha G_1+(1-\alpha)G_2(0\leq\alpha\leq 1$）也是概率母函数.
5. **(15分)** 只有两个候选人的选举中, 每次投票只投给一位候选人且不能弃票，投票结果显示 T 有 α 张选票, H 有 β 张选票, $\alpha\geq\beta$, 求计票过程中T 至多落后 H一票的概率.
6. **(15分)** 2024年诺贝尔物理学奖授予Hopfield和Hinton，表彰他们**利用人工神经网络进行机器学习的基础性发现和发明**. Hinton辛顿在Hopfield网络想法基础上引入了玻尔兹曼机：给定连接两点间权重$w_{ij}=w_{ji},w_{ii}=0\,(\forall i\neq j)$, 定义取值于$\{0,1\}^n$的$n$维随机向量$\mathbf{X}=(\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_n})$的联合概率
   $$\mathbb{P}(\mathbf{X}=\mathbf{x})=\frac{1}{Z_n}\exp\Big\{\sum_{1\leq i<j\leq n}w_{ij}x_ix_j+\sum_{1\leq i\leq n}b_ix_i\Big\},$$
   这里配分函数为
   $$Z_n=\sum_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^n}\exp\Big\{\sum_{1\leq i<j\leq n}w_{ij}x_ix_j+\sum_{1\leq i\leq n}b_ix_i\Big\}.$$
   $\mathbf{X^{(k)}}$表示$\mathbf{X}$去掉第k个分量后的向量, 试证明条件期望
   $$\mathbb{E}\big(X_k|\mathbf{X^{(k)}}\big)=\frac{e^{b_k+\sum_{i:i\neq k}w_{ki}\mathbf{X_i}}}{1+e^{b_k+\sum_{i:i\neq k}w_{ki}\mathbf{X_i}}}.$$
7. **(15分)** 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从参数为 p 的Bernoulli分布, 记 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 若当 $x\leq y$ (对所有分量 $x_i\leq y_i$) 时总有 $f(x)\leq f(y)$, 则称 $f:\{0,1\}^n\to\mathbb{R}$ 为递增函数. 对递增函数 f 和 g, 试证明
   (1) 当 $n=1$ 时 $\mathrm{Cov}\left(f\left(X_1\right),g\left(X_1\right)\right)\geq 0$;
   (2)当 $n\geq 2$ 时仍有 $\mathrm{Cov}(f(\mathbf{X}),g(\mathbf{X}))\geq 0$.

评分细则:

1. 概率空间三要素,4+4+4.构造随机变量3分
2. 答案4分,两个概率各3分,比大小理由5分.
3. X和Y概率密度各五分,求的是联合概率密度-5分,求分布函数-8分. 第二问不独立给1分，理由4分
4. 两个概率母函数各五分,需要验证(点出即可)各项系数非负,以及$s=1$处值为1.
5. 构造相应模型3分,使用反射原理7分,最终答案5分
6. 写出条件分布的值8分,写出期望7分,写出条件期望定义等酌情给分
7. 第一问5分,第二问10分

解答

1. 记H为硬币正面向上,T为硬币反面向上.

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\Omega\text{的全体子集}\}$$

$$\mathbb{P}\text{为}\Omega\text{上均匀分布,即}\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{4}.$$

设随机变量变量X_1:

$$X_1 : \Omega \to R. X_1(HH) = X_1(HT) = 1, X_1(TH) = X_1(TT) = 0.$$

即X_1取值由第一枚硬币决定.
随机变量X_2:

$$X_2 : \Omega \to R. X_2(HH) = X_2(TH) = 1, X_2(TT) = X_2(HT) = 0.$$

即X_2取值由第二枚硬币决定. 注意到,$\forall i, j = 0/1$.

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X_2 = j) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j).$$

从而X_1, X_2独立.

2. 记樊振东的胜率为$p, p > \frac{1}{2}$. 三局两胜下,樊振东胜率为,

$$p^2 + 2p^2(1-p).$$

五局三胜下,樊振东胜率为,

$$p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2.$$

$$\begin{gathered} p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 \vee p^2 + 2p^2(1-p) \\ p + 3p(1-p) + 6p(1-p)^2 \vee 1 + 2(1-p) \\ 6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 \vee 0 \\ 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1 \vee 0 \end{gathered}$$

记$f(p) = 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1$.

$$f'(p) = 6p^2 - 10p + 4.$$

$f'(p)$有零点$\frac{2}{3}$与1.
从而$f(p)$在$[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$上单调递增, 在$[\frac{2}{3}, 1)$上单调递减. $f(p) \geq \min\{f(\frac{1}{2}), f(1)\} = 0$. 从而五局三胜更有利.

3.
$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}\quad (x^2+y^2\le 1)$$
$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\quad (-1\le y\le 1).$$
同理,$f_X(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\quad (-1\le x\le 1)$.
不独立,注意到,
$$\mathbb{P}(X>0.9,Y>0.9)=0,\mathbb{P}(X>0.9)>0,\mathbb{P}(Y>0.9)>0.$$
从而,$\mathbb{P}(X>0.9,Y>0.9)\neq\mathbb{P}(X>0.9)\mathbb{P}(Y>0.9)$,不独立.

4. 幂级数$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$是概率母函数$\Leftrightarrow a_n\ge 0,\sum_{n=0}^{\infty}a_n=1$.
记$G_1(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ns^n$,$G_2(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ns^n$.记
$$G_1(s)G_2(s)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ns^n.$$
其中$c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$.容易验证,
$$c_n\ge 0,\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{n=0}^{\infty}b_n=1.$$
$G_1(s)G_2(s)$是概率母函数.
$$\alpha G_1(s)+(1-\alpha)G_2(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+(1-\alpha)b_n)s^n.$$
容易验证,
$$\alpha a_n+(1-\alpha)b_n\ge 0,\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+(1-\alpha)b_n)=\alpha+(1-\alpha)=1.$$
$\alpha G_1(s)+(1-\alpha)G_2(s)$是概率母函数.

5. 将投票的情况化为R^2中的折线图,若第i票是投给A的,则折线往右上画一个单位长度,若第i票是投给B的,则折线往右下画一个单位长度. 折线终点为$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$.共$C_{\alpha+\beta}^{\alpha}$种可能情况.
考虑所有甲比乙落后的票数超过一票的情况,此时折线图与$y=-2$至少有一个交点,将第一个交点右侧的折线图关于$y=-2$对称,得到新的折线图Γ'
由反射原理,Γ'全体恰为终点为$(\alpha+\beta,-(\alpha-\beta+4))$的折线全体.从而所求即,
$$1-\frac{C_{\alpha+\beta}^{\alpha+2}}{C_{\alpha+\beta}^{\alpha}}=1-\frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$
注:由题目叙述可知任意一个投票的情况(即折线图)是等概率出现的.若用随机游走模型,则可以看作求$\mathbb{P}(...|S_{\alpha+\beta}=\alpha-\beta)$为条件概率!

6. 注意到,

$$\mathbb{P}\big(X_k=0|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)+\mathbb{P}\big(X_k=1|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)=1.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{P}\big(X_k=0|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)}{\mathbb{P}\big(X_k=1|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)}\\
=&\frac{\mathbb{P}\big(X_k=0,\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)}{\mathbb{P}\big(X_k=1,\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)}\\
&\text{除与}x_k\text{有关的项外取值都相同,消去.}\\
=&\frac{e^{0+0}}{e^{\sum_{i:i\neq k} w_{ki}1\cdot\mathbf{X_i}+b_k\cdot 1}}\\
=&e^{-\sum_{i:i\neq k} w_{ki}\mathbf{X_i}+b_k}
\end{aligned}$$

从而,

$$\mathbb{E}\big(X_k|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)=\mathbb{P}\big(X_k=1|\mathbf{X}^{(\mathbf{k})}\big)=\frac{e^{b_k+\sum_{i:i\neq k} w_{ki}\mathbf{X_i}}}{1+e^{b_k+\sum_{i:i\neq k} w_{ki}\mathbf{X_i}}}.$$

7. (1)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(f\left(X_1\right),g\left(X_1\right)\right)\geq 0\\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}[f(X_1)g(X_1)]\geq \mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_1)]\\
&\Leftrightarrow pf(1)g(1)+(1-p)f(0)g(0)\geq (pf(1)+(1-p)f(0))\cdot(pg(1)+(1-p)g(0))\\
&\Leftrightarrow (p-p^2)(f(1)g(1)+f(0)g(0))\geq p(1-p)(f(1)g(0)+f(0)g(1))\\
&\Leftrightarrow (p-p^2)(f(1)-f(0))(g(1)-g(0))\geq 0
\end{aligned}$$

最后一项由f,g性质知成立.

(2) 法一:使用归纳假设.记$\mathbf{X}^n$为删去最后一个变量的$\mathbf{X}$

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n]].$$

注意,$\forall\mathbf{X}^n, f^*(x):=f(\mathbf{X}^n,x)$为递增函数. 由$n=1$的情况:

$$\mathbb{E}[f^*(x)g^*(x)]\geq \mathbb{E}[f^*(x)]\mathbb{E}[g^*(x)].$$

由于上式对任意$\mathbf{X}^n$均成立,故

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n]\geq \mathbb{E}[f(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n]\mathbb{E}[g(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n].$$

$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n]$是关于$\mathbf{X}^n$的函数,记为$F(\mathbf{X}^n)$,注意到它也是递增函数.
从而由归纳假设,

$$\mathbb{E}[F(\mathbf{X}^n)G(\mathbf{X}^n)]\geq \mathbb{E}[F(\mathbf{X}^n)]\mathbb{E}[G(\mathbf{X}^n)].$$

然而根据条件期望性质,

$$\mathbb{E}[F(\mathbf{X}^n)]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\mathbf{X})|\mathbf{X}^n]]=\mathbb{E}[f(\mathbf{X})].$$

综上,证毕.

法二:(优先看法一)

即证明,

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})] \geq \mathbb{E}[f(\mathbf{X})]\mathbb{E}[g(\mathbf{X})]$$

记$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, X_n)$,使用数学归纳法.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})] \\
=&\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})|\mathbf{Y}]] \\
=&\mathbb{E}[p(f(\mathbf{Y},1)g(\mathbf{Y},1)) + (1-p)(f(\mathbf{Y},0)g(\mathbf{Y},0))] \\
=&p\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)g(\mathbf{Y},1)] + (1-p)\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)g(\mathbf{Y},0)].
\end{aligned}$$

我们观察$f(\mathbf{Y},1)$与$g(\mathbf{Y},1)$这两个函数,它们是$\{0,1\}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 的递增函数,由归纳假设,

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)g(\mathbf{Y},1)] \geq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y},1)].$$

$f(\mathbf{Y},0)$与$g(\mathbf{Y},0)$同理.从而,

$$\begin{aligned}
&p\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)g(\mathbf{Y},1)] + (1-p)\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)g(\mathbf{Y},0)] \\
\geq&p\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y},1)] + (1-p)\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y},0)]
\end{aligned}$$

为了方便,记$h(1) = \mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)], h(0) = \mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)]$.

记$k(1) = \mathbb{E}[g(\mathbf{Y},1)], k(0) = \mathbb{E}[g(\mathbf{Y},0)]$.

$$\begin{aligned}
&p\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y},1)] + (1-p)\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y},0)] \\
=&ph(1)k(1) + (1-p)k(0)h(0). \qquad (1)
\end{aligned}$$

同理利用条件期望,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(\mathbf{X})]\mathbb{E}[g(\mathbf{X})] \\
=&p^2h(1)g(1) + p(1-p)h(1)g(0) + p(1-p)h(0)g(1) + (1-p)^2h(0)g(0). \qquad (2).
\end{aligned}$$

将(1)式与(2)式做差,

$$\begin{aligned}
&(1)-(2) \\
=&p(1-p)(h(1)-h(0))(k(1)-k(0)).
\end{aligned}$$

由定义,$\forall \mathbf{Y}, f(\mathbf{Y},1) \geq f(\mathbf{Y},0)$,那么当然有$\mathbb{E}[f(\mathbf{Y},1)] \geq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y},0)]$,即$h(1) \geq h(0)$,同理,$k(1) \geq k(0)$,从而,

$$p(1-p)(h(1)-h(0))(k(1)-k(0)) \geq 0.$$

证毕.

注:法二相比法一,区别在于把$n=1$的情况重新再写了一遍.