中国科学技术大学 2024 秋季学期
《概率论》期末试题 2024.12.25

姓名: 学号: 分数:

1. **(20分)** (i) 任给二阶矩存在的随机变量 X，当 a 取何值时 $\mathbb{E}[(X-a)^2]$ 最小?

(ii) 对连续型随机向量 (X,Y), Y 的二阶矩存在，令

$$H=\{g(X):g\text{为 Borel 可测函数}, g(X)\text{二阶矩存在}\}.$$

当 $h(X)\in H$ 时何时 $\mathbb{E}[(Y-h(X))^2]$ 最小?

2. **(10分)** 随机矩阵指矩阵值随机变量, 一个典型例子是 $p\times n$ 高斯矩阵 $X=(X_{ij})$, 这里 pn 个矩阵元 $\{X_{ij}\}$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$, 记

$$m_k=\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\big(XX^t\big)^k\right],$$

这里用到矩阵转置和求迹运算. 求 m_2 的值.

3. **(10分)** 若 $X_n\xrightarrow{\mathrm{D}}X$, $X_n\xrightarrow{\mathrm{D}}Y$, 证明 X 和 Y 同分布.

4. **(15分)** $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布连续型随机变量列, 定义 B_k 为事件 $\{X_k=\max\{X_1,\ldots,X_k\}\}$ 的示性函数, 记

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}B_k.$$

(i) 证明 B_k 服从参数为 $1/k$ 的伯努利两点分布 (**注：亦可证明他们相互独立，下面可直接利用此独立性结论**).

(ii) 证明

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}}\sum_{k=1}^{n}\Big(B_k-\frac{1}{k}\Big)$$

依分布收敛到标准正态分布.

(iii) 验证 $|\mathbb{E}(R_n)-\log n|\le 1$，从而证明

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}}(R_n-\log n)$$

依分布收敛到标准正态分布.

5. **(15分)** 法国数学家 Talagrand 因“**对概率论和泛函分析的开创性贡献，以及在数学物理和统计学中的杰出应用**”荣获 2024 年度“阿贝尔奖”, 如何理解高维现象的几何特性是贯穿其研究工作的一条主线. “**维数诅咒**” 与“**维数祝福**”, **高维空间会出现与直观看似相矛盾的现象和概念**. 且看一例,“**高维立方体几乎是球体的边界**”这一奇特现象.

记

$$A_{n,\epsilon}=\Big\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:(1-\epsilon)\sqrt{n/3}<\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}<(1+\epsilon)\sqrt{n/3}\Big\},$$

并用 $|\cdot|$ 表示体积，试用概率方法证明

$$\forall\epsilon\in(0,1),\quad \lim_{n\to\infty}|A_{n,\epsilon}\cap(-1,1)^n|/2^n=1.$$

6. **(15分)** 试证明正态分布的如下刻画：

$X \sim N(0,1)$ **当且仅当** g 和其导数 g' 均为有界连续函数时总有 $\mathbb{E}[Xg(X)] = \mathbb{E}[g'(X)]$.

提示：对标准正态分布 Z 和有界连续函数 h，构造一个新的函数

$$g_0(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} \big(h(y) - \mathbb{E}[h(Z)]\big) dy.$$

7. **(15分)** 记平面上整数格子点 $\Lambda_L := [1, L]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, 对 $x = (x_1, x_2) \in \Lambda_L$ 定义 $|x| = |x_1| + |x_2|$, 用 $x \sim y$ 表示 x 与 y 在 Λ_L 中相邻 (即 $|x - y| = 1$). 设 $\{\sigma_x\}_{x \in \Lambda_L}$ 为独立同分布随机变量列, $\mathbb{P}(\sigma_x = 1) = \mathbb{P}(\sigma_x = -1) = 1/2$, 试证明当 $L \to \infty$ 时

(i)

$$\frac{1}{L^2} \sum_{x \sim y, x, y \in \Lambda_L} \sigma_x \sigma_y \xrightarrow{\text{a.s.}} 0;$$

(ii) 任给 $\delta > 5/4$ 时

$$\frac{1}{L^\delta} \sum_{x \sim y, x, y \in \Lambda_L} \sigma_x \sigma_y \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$