2024 秋几何

微分流形部分

1. 设 $Q(x)=\sum_{i=1}^{p} x_i^2-\sum_{i=p+1}^{n} x_i^2$，证明：满足 $Q(Ax)=Q(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$ 的矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 构成的集合是维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的子流形.

2. 设 G 为Lie群，$\exp:\mathfrak{g}\to G$ 为指数映射.

①. 证明：$\exp$ 是 $0\in\mathfrak{g}$ 附近的一个微分同胚.

②. 设 G 连通，证明：$\exp(\mathfrak{g})$ 生成的子群等于 G.

3. ①. 设 $r<r'<\infty$. $p,q\in B(0,r)\subset\mathbb{R}^n$. 证明：存在微分同胚 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得 $\varphi(p)=q$，且 φ 在 $\mathbb{R}^n\setminus\overline{B(0,r')}$ 上为恒等映射.

②. 设 M 为 n 维流形，$p\in M$. 证明：存在 p 的开邻域 V，s.t. $\forall q\in V$，存在微分同胚 $f:M\to M$，s.t. $f(p)=q$.

③. 设 M 连通. 证明：$\mathrm{Diff}(M)$ 在 M 上的作用齐次.

4. 我们可以将 $S^1\times\mathbb{R}$ 等同于 $\mathbb{R}^2$ 中带定向的直线全体，(θ,p) 对应为

$$l:\ x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

这里 p 为原点到 l 的带定向距离.

①. 证明：$d\theta\wedge dp$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的仿射等距变换群作用下不变.

②. 设 C 为 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑闭曲线，弧长参数化为 $r(s)\ (0\le s\le L)$. 这里 L 为 C 的周长. 按如下方式定义 $F:[0,\pi]\times[0,L]\to S^1\times\mathbb{R}$：

$(\varphi,s)\longmapsto$ 过点 $r(s)$，方向与 C 的切向量 $\dot r(s)$ 成带定向角度 φ 的直线 $l_{\varphi,s}$.

证明：$F^*(d\theta\wedge dp)=\sin\varphi\, d\varphi\wedge ds$.

③. 证明: $\mathrm{Card}(\ell\cap C)<\infty$ 对几乎所有的直线 ℓ 成立, 且成立 Cauchy-Crofton 公式:
$$\int_{\mathbb{R}\times S^1}\mathrm{Card}(\ell\cap C)\,dp\wedge d\theta = 2L.$$

代拓部分.

1. 设 $p: X\to Y$ 为满的连续闭映射. 且 $\forall y\in Y$, $p^{-1}(y)$ 是紧的. 证明:

①. X Hausdorff $\Rightarrow$ Y Hausdorff.

②. X 正则 $\Rightarrow$ Y 正则.

2. 设 l_1, l_2 为 $\mathbb{E}^3$ 中两条平行直线. l_3 为与 l_1, l_2 各有一交点的直线. 计算
$$\pi_1(\mathbb{E}^3\setminus(l_1\cup l_2\cup l_3)).$$

3. 设 $f: \mathbb{RP}^2\to T^2$ 为连续映射. 证明 f 零伦.

4. 计算 $\mathbb{RP}^3\setminus\{x\}$ 的各阶同调群.

5. 设 M_3 为亏格为3的可定向闭曲面. 求其上的 n 叶覆叠空间.