2024 秋博资考分析

1. $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ 可测，且 $m(E_1), m(E_2) > 0$. 证明 $\exists h \in \mathbb{R}^2$, s.t.

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

2. $f \in AC[0,1]$, $A \subset [0,1]$ 可测. 证明:

① f 把零测集映成零测集

② $f(A)$ 可测.

3. 设 $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f_n \in L^p[0,1]$ 满足:

① $f_n \to f$ a.e. ② $\sup_n \|f_n\|_{L^p[0,1]} < \infty$

证明: $\forall g \in L^q[0,1]$, 有 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g = \int_0^1 fg$. (只准用实分析内容证)

4. 设 $f \in H(B(0,1))$, 满足 $|f(z) - f(w)| \leq C|z-w|^{\alpha}$, C 为一常数. 证明.

$$|f'(z)| \leq C(1-|z|)^{\alpha-1}, \quad \forall z \in B(0,1).$$

5. 设 $f \in H(B(0,2))$. 证明:

$$\max_{|z|=1} \left| f(z) - \frac{1}{z} \right| \geq 1.$$

6. 设 B 为 Banach 空间, B^* 为对偶空间. 证明: $\forall f_0 \in B$, $\|f_0\| = M > 0$ 存在 $l \in B^*$, s.t. $l(f_0) = M$ 且 $\|l\| = 1$.

7. 设 H 为 $L^2[0,1]$ 的闭子空间, 且 $H \subset C[0,1]$. 证明: $\dim H < \infty$.