2024年秋季学期泛函分析期末考试

主讲教师: 刘聪文、陈杲+曲三太

2024年12月22日 9:00-11:00

一、设X是完备的度量空间，A是X的子集，证明：A列紧当且仅当$\overline{A}$自列紧。

二、设X是Banach空间, $x \in X$. 证明: $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ \|f\| = 1\}$, 这里$X^*$是$X$的对偶空间。

三、证明：有限维的线性赋范空间是自反的。

四、设T_1, T_2是Hilbert空间H上的线性算子，且满足

$$\langle T_1 x, y\rangle = \langle x, T_2 y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

证明: T_1, T_2均为有界线性算子。

五、设X是Banach空间，X中的点列$\{x_n\}$在X中弱收敛于x. 证明: $\|x\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

六、定义算子$A : C[0,1] \to C[0,1]$如下:

$$(Au)(t) := \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le 1.$$

证明: A是紧算子，且$\sigma(A) = \{0\}$.

七、设X, Y是两个线性赋范空间, $T : X \to Y$是线性算子，其满足$\dim R(T) < \infty$且$\ker(T)$是X的闭子空间，证明: $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.