III.1 2024 秋泛函 (H) 期末试题

问题 III.1.1: [10 分]

对积分方程

$$x(t) = \int_0^t x(t-s)e^{-s^2}\,\mathrm{d}x = y(t), \forall t \in [0,1].$$

其中 $y(t) \in C[0,1]$ 为一给定函数. 试证明: 存在唯一解 $x(t) \in C[0,1]$.

问题 III.1.2: [15 分]

设 M 为 Banach 空间 X 的一个闭子空间. 证明:$({}^{\perp}M)^{\perp} = M$.

问题 III.1.3: [15 分]

设 X 是实 B^* 空间. 若点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 是 X 中 Cauchy 列, 且 $x_n \rightharpoonup \theta$. 证明:$x_n \to \theta$.

问题 III.1.4: [20 分]

设 A, B 为复 B 空间 X 上的两个有界线性算子. 证明: 若 $A - B$ 为紧算子, 则

$$\sigma(A)\backslash\sigma_p(A) \subseteq \sigma(B) \text{和} \sigma(B)\backslash\sigma_p(B) \subseteq \sigma(A).$$

进一步在复 Hilbert 空间 ℓ^2 上定义算子

$$T\colon (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(\frac{2x_1}{1}, \frac{2x_2 + 2x_1}{2}, \cdots, \frac{2x_n + nx_{n-1}}{n}, \cdots\right),$$

1. 证明:T 是 ℓ^2 上 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T) = -1$.
2. 求 T 的谱集 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

问题 III.1.5: [20 分]

设 H 是一个有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的实 Hilbert 空间,$\|\cdot\|$ 是 H 上由此内积诱导的范数. 若 $T\colon H \to H$ 是一个线性算子,$D(T) = H$, 且存在 $C > 0$ 使得

$$\langle T(x), x\rangle \geqslant C\|x\|^2,$$

对任意的 $x \in H$ 成立. 证明:T 是既单又满的有界线性算子.

问题 III.1.6: [20 分]

若 V 是 $L^2[0,1]$ 上的一个闭子空间, 且 $V \subseteq C[0,1]$. 证明:$\dim(V) < +\infty$.