2024年代数几何期末考试题

以下涉及的代数簇均假设定义在代数闭域k上.

1(15分). (1) 简述仿射代数簇的定义.

(2) 设X是一个仿射代数簇, $f\in\Gamma(X)$是一个正则函数. 给出主开集$D(f)$和仿射代数簇的同构.

(3) 设U是仿射代数簇X的一个开集, 给出一个方案把U分解为有限个仿射开集的并.

2(15分). 设$\mathbb{Z}$是整数环, $X=Spec\mathbb{Z}$是仿射概型.

(1) 设p是一个素数, 令$\eta=(0)$, $P=(p)\in X$, 写出$\mathcal{O}_{X,\eta},\mathcal{O}_{X,P}$并说明$\mathcal{O}_{X,P}$ 是一个离散赋值环;

(2) 写出X的两个闭子概型, 其中一个是不可约的(irreducible)且非既约的(non-reduced), 一个是既约的(reduced)且可约的(reducible), 不需要说明理由.

3 (15). 设$X=SpecA$是一个仿射概型, M是A-模. 定义一个层$\widetilde{M}$: 对X的开集U,

$$\widetilde{M}(U):=\{\gamma:U\to\coprod_{P\in U}M_P\mid$$
$$\forall P\in U,\ \exists f\in A\setminus P \text{ and } x\in M, s.t.\gamma|_{SpecA_f}=x/f\}.$$

(1) 我们有一个自然的映射$M\to\widetilde{M}(X)$, $x\mapsto\gamma_x(P)=x\in M_P$. 这个映射是否是单射? 陈述作为判断依据的交换代数结论.

(2) 对$P\in X$, 描述茎$\widetilde{M}_P$ (不需要陈述理由).

(3) 设$\gamma\in\widetilde{M}(X)$. 我们知道存在主开集覆盖$X=\bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, 其中$f_1,\cdots,f_n\in A$, 满足: 在$D(f_i)$上存在$x_i\in M$, 使得$\gamma|_{D(f_i)}=x_i/f_i$. 问: 由粘合条件

$$\forall P\in D(f_i)\cap D(f_j),\ x_i/f_i=x_j/f_j\in M_P$$

我们能否得出$x_i/f_i=x_j/f_j\in M_{f_if_j}$, 能否进一步得出$f_ix_j=f_jx_i$? 如果不能举一个反例.

4(15分). 设$F\in k[X_0,X_1,\cdots,X_n]$是$d$-次齐次多项式, 其定义了$\mathbb{P}^n$上的一个除子$D_F$. 记$U_i=\{X_i\neq 0\}\cong\mathbb{A}^n$.

(1) 在U_i上找到一个函数f_i使得$D_F|_{U_i}=div(f_i)$.

(2) 写一个具体的可逆层之间的同构$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_F)$ (不需要解释).

(3) 在U_0上表示出$\Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_F))$的一组基.

5(10分). (1) 设$n\geq 2$, $f,g\in k[x_1,\cdots,x_n]$是互素的非常值多项式, 证明存在无穷多个点$P\in\mathbb{A}^n$使得$g(P)=0,f(P)\neq 0$.

(2) 把$X=\mathbb{A}^n\backslash\{(0,0,\cdots,0\}$视为$\mathbb{A}^n$的开集. 计算正则函数环$\Gamma(X)$, 并证明$X=\mathbb{A}^n\backslash\{(0,0,\cdots,0\}$不是仿射代数簇.

6(25分). 设char $k=0$, $F(X,Y,Z)$是d-次不可约齐次多项式, $\mathbb{P}^2$ 上的齐次坐标为X,Y,Z. 令$C=V_p(F)\subset\mathbb{P}^2$, 记$f(x,y)=F/Z^d$.

(1) 写出偏导数f_x和F_X之间的关系, 从而证明C是光滑的当且仅当$V_P(F_X,F_Y,F_Z)=\emptyset$.

(2) 设C是光滑曲线, 将C看做$\mathbb{P}^2$上的有效除子, 回顾: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)$ 是$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$的理想层, 恰好定义了闭子概型$C$, 则$i_*\mathcal{O}_C=\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)}$. 记$\mathcal{O}_C(n):=i_*\mathcal{O}_C\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$, 可以视为$C$上的可逆层. 已知有以下短正合列

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)\to\mathcal{O}_C(n)\to 0$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)\cdot\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}{G}$

(2.1) 证明: 对$n\geq 0$, $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))\to\Gamma(\mathcal{O}_C(n))$是满射.

(2.2) 计算$\dim_k\Gamma(\mathcal{O}_C(n))$.

提示: 可以利用Max Noether 定理的推论: 设$F(X,Y,Z),G(X,Y,Z),H(X,Y,Z)\in k[X,Y,Z]$. 假设$F$定义的曲线是光滑曲线, 如果对每个点$P$, 有$I_P(H,F)\geq I_P(G,F)$, 则$H\in I$.

(3) 设$F=X^4+Y^4-Z^4$. 计算有理微分dx对应的除子, 并写出$\Gamma(C,\Omega_{C/k})$的一组基.

7(10分). Max Noether 定理: 设$F(X,Y,Z),G(X,Y,Z),H(X,Y,Z)\in k[X,Y,Z]$, 令$I=(F,G)$. 假设$F,G$没有公因子, 故$V_p(F,G)$是一个零维概型. 设$P\in\mathbb{P}^2$, 则$P$对应齐次理想$\mathcal{P}$, 记$I_P$是$I$关于$\mathcal{P}$的齐次局部化.

如果对任意闭点$P\in\mathbb{P}^2$, $H\in I_P$ (在点P满足Noether条件), 那么$H\in I$.

(1) 类比上述定理, 写一个n-个变量版本的定理.

(2) 判断所写定理是否正确, 如果正确请写一个证明, 否则举一个反例. (提示用归纳法.)