第 6 章 微分几何 (H)2024 秋季期中

注意事项:

1. 试题中 $\mathbb{R}^3$ 等同于欧氏空间 $\mathbb{E}^3$.
2. 曲面 $M: r = r(u,v)$ 若满足 $F \equiv M \equiv 0$, 则其 Gauss 方程和 Codazzi 方程可写为:

$$-\sqrt{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right) = LN \text{和} L_v = HE_v, N_u = HG_u.$$

练习 6.1(8 分)

1. (4 分) 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = e^x \cos y$. 设 v_p 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个切向量, 其中 $v = (2,-1,3), p = (2,0,-1)$. 计算 $\mathrm{d}f(v_p)$.
2. (4 分) 设 r, θ, z 为 $\mathbb{R}^3$ 的圆柱坐标函数, 也即:$z = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$. 计算体积元 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 用 r, θ, z 以及 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z$ 的表达式.

练习 6.2(13 分) 考察空间正则曲线 $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, r(s) = (\frac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5}\cos s)$.

1. (4') 证明 s 为弧长参数.
2. (4') 求该曲线的主法向量 n 和副法向量 b.
3. (5') 求该曲线的曲率和挠率, 判断该曲线是何种曲线, 并说明理由.

练习 6.3(23 分)

1. (7') 设 $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 为 xy 平面上单位圆周曲线的弧长参数化曲线. 在每点 $\beta(s)$ 处放一条与单位圆径向方向垂直, 其切向与单位圆切向 $\beta'(s)$ 成 $45°$ 夹角的直线 $\ell(s)$ 所形成的直纹面记作 M_1. 将每点 $\beta(s)$ 处的直线 $\ell(s)$ 替换成与其垂直并且与单位圆径向方向垂直的直线 $\tilde{\ell}(x)$ 所测直线族形成的直纹面记作 M_2. 试证明 M_1 和 M_2 作为 $\mathbb{R}^3$ 的点集相等.
2. (7') 设 M 为曲线 $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, r(t) = (g(t), h(t), 0), h > 0$ 绕着 x 轴旋转所得的旋转面. 设 h' 恒不为零, 证明该曲线 M 总是可以正则参数化为如下形式:
$$r(u,v) = (f(u), u\cos v, u\sin v).$$
3. (9') 求 (b) 中正则参数曲面 $r(u,v)$ 的主曲率,Gauss 曲率和平均曲率.

练习 6.4(15 分) 设 $r = r(s)$ 是一条弧长参数空间曲线, 其曲率 $\kappa > 0$, 挠率 $\tau \neq 0$.

1. (7') 设曲线 r 落在以 $c \in \mathbb{R}^3$ 为心,R 为半径的球面上, 证明:
$$r - c = -\rho\vec{n} - \rho'\sigma\vec{b},$$
其中 $\vec{n}$ 和 $\vec{b}$ 分别为其主法向量和副法向量,$\rho = \frac{1}{n}, \sigma = \frac{1}{r}$.
2. (8') 设 $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ 为常值函数,$\rho' \neq 0$. 证明:r 必落在某一个球面上.

练习 6.5(16 分) 设 $M: r = r(u,v), (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则曲面片. 设其第一, 第二基本形式为

$$\mathrm{I} = E\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + F(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u) + G\,\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v, \mathrm{II} \quad = L\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + M(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u) + N\,\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v,$$

其 Gauss 曲率为 H, 平均曲率为 K.

1. (7') 记 $\mathcal{W}$ 为其 Weingarten 变换. 证明下式对任意 $v, w \in T_pM, \forall p \in M$ 成立:
$$\langle \mathcal{W}^2(v), w \rangle - 2H\mathrm{II}(v,w) + K\mathrm{I}(v,w) = 0.$$
2. (9') 记 $v = v_1 r_u + v_2 r_v$ 为曲面的一个非零切向量. 证明 v 为主方向, 当且仅当
$$\det\begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix} = 0.$$

✍ **练习 6.6(25 分)** 设 $M\colon r=r(u,v),(r,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中没有脐点的正则曲面片. 其第一, 第二基本形式如上题所记. 设其参数化为正交曲率线网, 且 $v-$ 线的主曲率恒为 0.

1. (5') 证明: 光滑向量值函数 $t\mapsto v(t)\in\mathbb{R}^2$ 方向不变, 当且仅当 $v(t)\wedge v'(t)=0$.
2. (5') 计算 Christoffel 符号 Γ_{22}^1 用函数 E,F,G 及其偏导数的表达式.(注意指标定义方式为 $u^1=u,u^2=v$.)
3. (5') 证明:$r_{vv}\wedge r_v=\Gamma_{22}^1 r_u\wedge r_v$.
4. (10') 证明:M 是直纹面.

微分几何(H) 期中 2024秋

1. (a) $df(v_p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left((2,0,-1)+t(2,-1,3)\right)$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(2+2t, -t, -1+3t)$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{2+2t}\cos(-t)$

$= \left(e^{2+2t}\cdot 2\cos(-t) + e^{2+2t}\sin t\right)\Big|_{t=0}$

$= 2e^2$

(也可以用 $df(v_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)(v_p)$)

(b) $dx = \cos\theta\, dr + (-r\sin\theta)\, d\theta$

$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

$dz = dz$

因此 $dx\wedge dy\wedge dz = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\wedge(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)\wedge dz$

$= r\, dr\wedge d\theta\wedge dz$.

2. (a) $r'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin s, -\cos s, \frac{3}{5}\sin s\right)$

因此有 $|r'(s)| = 1$，故而 s 为弧长参数

(b) $r''(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s\right)$

因为 $|r''(s)|=1$，知主法向量 $n(s) = \left(-\frac{4}{5}\cos s, \sin s, \frac{3}{5}\cos s\right)$

从而副法向量 $b(s) = r'(s)\wedge n(s) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$.

(c) 曲率 $\kappa(s) = |r''(s)| = 1$.

因为 $\frac{d}{ds}b(s) = -\tau(s)n(s)$，而 $\frac{d}{ds}b(s)\equiv 0$，知 $\tau(s)\equiv 0$

由空间曲线基本定理，知该曲线为单位圆曲线

3. (a) 由题意，M_1 可表为

$$r(s,v) = \beta(s) + v(\beta'(s) + (0,0,1))$$

$$= (\cos s, \sin s, 0) + v(-\sin s, \cos s, 1)$$

$$= (\cos s - v\sin s, \sin s + v\cos s, v)$$

此曲面作为点集为 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\}$

同样地，M_2 可表为

$$\bar{r}(s,v) = \beta(s) + v(-\beta'(s) + (0,0,1))$$

$$= (\cos s + v\sin s, \sin s - v\cos s, v)$$

其点集仍为 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\}$

因此，M_1 和 M_2 作为 $\mathbb{R}^3$ 的点集相等.

(b) 由题意，旋转面 M 可参数化为

$$r(t,\theta) = (g(t), h(t)\cos\theta, h(t)\sin\theta)$$

作参数变换 $\begin{cases} u = h(t) \\ v = \theta \end{cases}$

因为 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h'(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 故为可容许参数变换

又因 $h'(t)$ 恒不为 0，可设 $h'(t)>0, \forall t$. 即 h 单调

因此其反函数 h^{-1} 存在，即 $t = h^{-1}(u)$.

定义函数 $f(u) := g(h^{-1}(u))$，则曲面被重新参数化为 $r(u,v) = (f(u), u\cos v, u\sin v)$

(c) 计算其切向量如下

$$r_u = (f_u, \cos v, \sin v)$$

$$r_v = (0, -u\sin v, u\cos v)$$

故而 $r_u\wedge r_v=(u,-uf_u\cos v,-uf_u\sin v)$

则其单位法向量 $n=\dfrac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\dfrac{u(1,-f_u\cos v,-f_u\sin v)}{\sqrt{u^2f_u^2+u^2}}$

$=\dfrac{(1,-f_u\cos v,-f_u\sin v)}{\sqrt{f_u^2+1}}$

由此可计算第一、第二基本形式如下

$E=1+f_u^2,\quad F=0,\quad G=u^2$

$L=\langle r_{uu},n\rangle=\langle(f_{uu},0,0),n\rangle=\dfrac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2+1}}$

$M=\langle r_{uv},n\rangle=\langle(0,-\sin v,\cos v),n\rangle=0$

$N=\langle r_{vv},n\rangle=\langle(0,-u\cos v,-u\sin v),n\rangle=\dfrac{uf_u}{\sqrt{f_u^2+1}}$

~~则 Weingarten 变换在基 $\{r_u,r_v\}$ 下的~~

则 Weingarten 变换 W 满足

$$W\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{L}{E}&0\\0&\frac{N}{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\r_v\end{pmatrix}$$

故主曲率 $k_1=\dfrac{L}{E}=\dfrac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{3/2}},\quad k_2=\dfrac{N}{G}=\dfrac{f_u}{u\sqrt{f_u^2+1}}$

高斯曲率 $K=\dfrac{f_uf_{uu}}{u(1+f_u^2)^2},\quad H=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{3/2}}+\dfrac{f_u}{u\sqrt{f_u^2+1}}\right]$.

4. (a) 证明：$r-c$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中向量，则存在函数 $x(s),y(s),z(s)$

使 $r(s)-c=x(s)t(s)+y(s)n(s)+z(s)b(s)$

其中 $\{r;t,n,b\}$ 为曲线的 Frenet 标架

首先 $r(s)-c$ 为球面的径向，与 $t(s)$ 垂直（即 $\langle r(s)-c,r(s)-c\rangle\equiv\text{const}$ $\Rightarrow\langle r(s)-c,t(s)\rangle=0$）

故 $x(s)\equiv0$.

即 $r(s)-c=y(s)n(s)+z(s)b(s)$ ⟨1⟩

$\langle 1\rangle$式两边求导得

$$t(s) = y'(s)\,n(s) + y(s)\,n'(s) + z'(s)\,b(s) + z(s)\,b'(s).$$

由Frenet标架运动方程知

$$t(s) = y'(s)n(s) + y(s)\big(-k(s)t(s) + \tau(s)b(s)\big) + z'(s)b(s) + z(s)\big(-\tau(s)n(s)$$

故有 $-y(s)k(s) \equiv 1$, $y'(s) - \tau(s)z(s) \equiv 0$, $y(s)\tau(s) + z'(s) \equiv 0$

这意味着 $y(s) = -\dfrac{1}{k(s)} = -\rho(s)$

$$z(s) = \frac{y'(s)}{\tau(s)} = -\rho'(s)\sigma(s).$$

即 $r - c = -\rho n - \rho'\sigma b$.

(b) 由(a)提示，我们只需证 $r + \rho n + \rho'\sigma b$ 为常向量.

$$\frac{d}{ds}(r + \rho n + \rho'\sigma b) = t(s) + \rho' n + \rho n' + (\rho'\sigma)' b + \rho'\sigma b'$$

$$= t(s) + \rho' n + \rho(-kt + \tau b) + (\rho'\sigma)' b + \rho'\sigma(-\tau n)$$

$$= (1 - \rho k)t + (\rho' - \rho'\sigma\tau)n + (\rho\tau + (\rho'\sigma)')b. \quad \langle 2\rangle$$

易见 $1 - \rho k \equiv 0$, $1 - \sigma\tau \equiv 0$.

注意到 $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 \equiv$ 常数，求导得 $2\rho\rho' + 2(\rho'\sigma)(\rho'\sigma)' \equiv 0$

因 $\rho' \neq 0$，则 $(\rho'\sigma)' = -\dfrac{2\rho\rho'}{2\rho'\sigma} = -\dfrac{\rho}{\sigma} = -\rho\tau$

故而 $\rho\tau + (\rho'\sigma)' \equiv 0$.

代入$\langle 2\rangle$式得 $\dfrac{d}{ds}(r + \rho n + \rho'\sigma b) \equiv 0$. 即 $r + \rho n + \rho'\sigma b \equiv c$

为常向量。故而 $r - c = -\rho n - \rho'\sigma b$ 模长 $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ 为常数.

即 r 落在一个球面上. □

5. (a) 因Weigarten变换的特征值为两个主曲率 k_1, k_2，故其特征多项式为

$$(x-k_1)(x-k_2) = x^2-(k_1+k_2)x+k_1k_2$$
$$= x^2-2Hx+K$$

因此而有 $W^2-2HW+K\,\mathrm{Id}=0$

对 $v, w \in T_pM$，则有 $\langle W^2(v)-2HW(v)+Kv, w\rangle = 0$

此即 $\langle W^2(v), w\rangle - 2H\,\mathrm{II}(v,w) + K\,\mathrm{I}(v,w) = 0$.

（亦可通过表 v, w 为主方向组合直接验证）.

(b) $v = v_1 r_u + v_2 r_v$ 为主方向 当且仅当 $W(v) \parallel v$

而 $W(v) = (v_1 \quad v_2)\, W \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$

$$= (v_1 \quad v_2)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

$$= (v_1 \quad v_2)\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} LG-MF & -LF+ME \\ MG-NF & -MF+NE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left(v_1(LG-MF)+v_2(MG-NF),\ v_1(-LF+ME)+v_2(-MF+NE)\right)\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

$W(v) \parallel v \Rightarrow [v_1(LG-MF)+v_2(MG-NF)]v_2$

$$= v_1[v_1(-LF+ME)+v_2(-MF+NE)]$$

即：$v_1^2(ME-LF)+v_1v_2[EN-LG]+v_2^2(NF-MG)=0$

即 $\begin{vmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$

6.

(a) 作业题

(b) ~~由定义~~ 因参数化为正交曲率线网，则 $F=M=0$.

由定义 $\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1\alpha}(g_{\alpha 2,2} + g_{2\alpha,2} - g_{22,\alpha})$

$= \frac{1}{2} g^{11}(2g_{12,2} - g_{22,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{22,2})$

因 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$ 知 $g^{11} = \frac{1}{E}$，$g^{12} = 0$

$\Rightarrow \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{E}(0 - G_u) + \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{G}G_v} = -\frac{G_u}{2E}$.

(c). 由自然标架运动方程知

$r_{vv} = \Gamma_{22}^\alpha r_\alpha + b_{22} n = \Gamma_{22}^1 r_1 + \Gamma_{22}^2 r_2 + b_{22} n$

故 $r_{vv} \wedge r_v = \Gamma_{22}^1 r_u \wedge r_v$.

(d). 我们证明 $\Gamma_{22}^1 = 0$. 只需 $G_u = 0$

由 Codazzi 方程 $N_u = H G_u$ 〈3〉

由于 $F=M=0$，知 r_u, r_v 均为主方向，其相应主曲率为 $k_1 = \frac{L}{E}$，$k_2 = \frac{N}{G}$. 由题设 $\frac{N}{G} \equiv 0$. 因 $G \neq 0$ 知 $N \equiv 0$.

代入 Codazzi 方程〈3〉有 $HG_u \equiv 0$.

又因 $H = \frac{1}{2}(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}) = \frac{1}{2}\frac{L}{E}$，及曲面无脐点的假设有 $H \neq 0$.

这说明 $G_u \equiv 0$. 故而 $\Gamma_{22}^1 = 0$. 即 $r_{vv} \wedge r_v = 0$

由 (a) 知 r_v 方向不变，故 v-线为直线，M 为直纹面.