微分几何 (H)2024 秋季期末

这个没有原卷拍照, 只有回忆版. 大部分题目背景是作业题/往年试题, 经我从答案和记忆中恢复而来. 可能有所偏差. 由于时间久远, 分数分布已经忘却.

✍ **练习 6.7[24]** 按下列要求作答.

1. 设曲线 $\vec{r}(t)$ 的曲率为 $\kappa(t)$, 挠率为 $\tau(t)$. 问: 曲线 $\vec{r}(-t)$ 的曲率和挠率为多少?
2. 判断对错.
   (a). 是否存在球 $\mathbb{S}^2$ 与平面的 (局部) 等距变换?
   (b). $\mathbb{S}^2$ 上一向量沿大圆方向平行移动一周后与原向量重合.
   (c). (忘记了.)
3. 从下面四个定理中选取一个叙述.
   (a). Liebmann 定理;
   (b). Hadamard 定理;
   (c). Cohn-Vossen 定理;
   (d). Hilbert 定理.

✍ **练习 6.8[16]** 设 M 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面,$\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ 为 M 上一条正则曲线, s 为弧长参数. 记 $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ 为曲线的切向量, $\mathbf{h}(s) \in T_{\alpha(s)}M$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处与 $\mathbf{t}(s)$ 正交的单位切向量, 且 $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{h}(s)\}$ 与曲面的定向相同, 即 $\mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{h}(s) = \mathbf{n}(s)$, 其中 $\mathbf{n}(s)$ 为曲面 M 在 $\alpha(s)$ 处的单位法向量. 定义曲线 $\alpha(s) \subset M$ 在 $\alpha(s)$ 处的测地挠率为

$$\tau_g(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{h}(s) \right\rangle.$$

1. 证明: 曲线 $\alpha(s)$ 为曲面 M 上的曲率线, 当且仅当其测地挠率 τ_g 恒为零.
2. 证明: 直纹面 $\widetilde{r}(s,t) = \alpha(s) + t\vec{n}(s)$ 可展当且仅当 $\alpha(s)$ 为曲率线.

注 本题实为第九次作业题.

✍ **练习 6.9[20]** 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 为一欧氏区域,$\phi\colon D \to (0, \frac{\pi}{2})$ 为一光滑函数. 定义:

$$I = \cos^2\phi\, \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \sin^2\phi\, \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v,$$

$$II = \sin\phi\cos\phi(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u - \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v),$$

1. 设存在正则曲面片 $r\colon D \to \mathbb{R}^3$ 以 I, II 为其第一, 第二基本形式. 求其在正交活动标架

   $$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_u}{\cos\phi}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{r}_v}{\sin\phi}$$

   下的五个微分 1-形式:

   $$\omega^1, \omega^2, \omega_1^3, \omega_1^2, \omega_2^3.$$

2. 给出存在正则曲面片 $r\colon D \to \mathbb{R}^3$ 以以上 I, II 为其第一, 第二基本形式的充要条件.
3. 若存在这样的曲面片, 求其高斯曲率.

注 本题实为 23 年期末最后一题.

✍ **练习 6.10[15]** 设 $r = r(\rho, \theta)$ 为正则曲面 M 在 $p \in M$ 点附近的测地极坐标系, 其中 $\rho < \varepsilon_0$, ε_0 充分小. 对 $t \in (0, \varepsilon_0)$, 记 $S_t(p)$ 为以 p 点为心, 半径为 t 的测地圆; 其包围的区域 $B_t(p)$ 称为半径为 t 的测地圆盘. 设 A_t 为 $B_t(p)$ 的面积.

1. 计算 $\sqrt{G}$ 到 $o(\rho^3)$ 的 Taylor 展开.
2. 证明: 当 t 很小时成立

   $$A_t = \pi t^2 - \frac{\pi}{12}t^4 K(p) + o(t^4).$$

注 本题实为第九次作业题.

✍ **练习 6.11[25]** 考虑旋转曲面

$$r(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, u), f>0, \quad u\in\mathbb{R}, v\in(0,2\pi).$$

1. 纬圆 $u=u_0$ 为测地线当且仅当 $f'(u_0)=0$.
2. 考虑悬链线, 此时 $f(u)=\cosh u$. 计算主曲率, 高斯曲率和渐进方向.
3. 证明: 悬链线上存在唯一闭测地线.

注 本题背景类似第九题.

把第九次作业题附在后面.

1.0.9 习题

1. 回忆悬链面有如下的参数表示

$$r(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,u)\,,\quad u\in\mathbb{R},\quad v\in(0,2\pi).$$

(i) 求悬链面上经线(即u-线)和纬线(即v-线)的测地曲率；经线和纬线是否为测地线？

(ii) 设曲线 $C:r(s)=r(u(s),v(s))$ 为悬链面上一条测地线，与经线的夹角为 $\theta(s)$ （定向为从r_u到$r'(s)$, 即若有 $(r_u,r'(s),\mathbf{n})>0$，则 $\theta(s)>0$ ）. 试判断 $\cosh u(s)\sin\theta(s)$ 沿着曲线 C 是否为常数，并说明理由。

(iii) 给定一般的旋转面

$$r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))\,,\ f>0,\quad u\in\mathbb{R},\quad v\in(0,2\pi).$$

考虑其上一条测地线 $C:r(s)=r(u(s),v(s))$ ，与经线的夹角为 $\theta(s)$ 。试判断 $f(u(s))\sin\theta(s)$ 沿着曲线 C 是否为常数，并说明理由。

2. 设 M 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面，$\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ 为 M 上一条正则曲线， s 为弧长参数。记 $\mathbf{t}(s)=\alpha'(s)$为曲线的切向量，$\mathbf{h}(s)\in T_{\alpha(s)}M$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处与 $\mathbf{t}(s)$ 正交的单位切向量，且 $\mathbf{t}(s),\mathbf{h}(s)\}$ 与曲面的定向相同，即 $\mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{h}(s)=\mathbf{n}(s)$，其中 $\mathbf{n}(s)$ 为曲面 M 在 $\alpha(s)$ 处的单位法向量。定义曲线 $\alpha(s)\subset M$ 在 $\alpha(s)$ 处的测地挠率为

$$\tau_g(s)=\left\langle\frac{d\mathbf{n}}{ds},\mathbf{h}(s)\right\rangle.$$

(i) 证明

$$\frac{d}{d}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{h}\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k_g&k_n\\ -k_g&0&\tau_g\\ -k_n&-\tau_g&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{h}\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}.$$

(ii) 记 $\mathcal{W}_s:T_{\alpha(s)}M\to T_{\alpha(s)}M$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处 Weingarten 变换，说明

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\mathcal{W}_s\left(\frac{d\alpha}{ds}\right).$$

(iii) 设 $\kappa_1(s),\kappa_2(s)$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处的主曲率，$e_1(s),e_2(s)$ 为对应的单位正交主方向，且 $\{e_1,e_2,\mathbf{n}\}$ 为正定向(即 $\mathbf{n}=e_1\wedge e_2$)。若 e_1 与 $\mathbf{t}$ 的夹角为 φ（定向为从e_1到$\mathbf{t}$, 即若有 $(e_1,\mathbf{t},\mathbf{n})>0$，则 $\varphi>0$ ），证明

$$\tau_g=(\kappa_1-\kappa_2)\cos\varphi\sin\varphi.$$

(iv) 证明曲线 $\alpha(s)$ 为曲面 M 上的曲率线当且仅当其测地挠率 τ_g 恒为零。

(v) 设 $e_1(s),\mathbf{t}(s)$ 为沿着曲线 $\alpha(s)$ 的光滑切向量场，定义如 (iii) 。证明

$$\left\langle\frac{D\mathbf{t}}{ds},\mathbf{n}\wedge\mathbf{t}\right\rangle-\left\langle\frac{De_1}{ds},\mathbf{n}\wedge e_1\right\rangle=\frac{d\varphi}{ds}.$$

3. 设 $r=r(\rho,\theta)$ 为正则曲面 M 在 $p\in M$ 点附近的测地极坐标系，其中 $\rho<\varepsilon_0,\varepsilon_0$ 充分小. 对 $t\in(0,\varepsilon_0)$, 记 $S_t(p)$ 为以 p 点为心、半径为 t 的测地圆；其包围的区域 $B_t(p)$ 称为半径为 t 的测地圆盘。设 L_t,A_t 分别为 $S_t(p)$ 的周长和 $B_t(p)$ 的面积。

(i) 证明当 t 很小时，有下式成立

$$\begin{aligned} L_t =& 2\pi t - \frac{\pi}{3}t^3 K(p) + o(t^4), \\ A_t =& \pi t^2 - \frac{\pi}{12}t^4 K(p) + o(t^4), \end{aligned}$$

以及

$$4\pi A_t - L_t^2 = \pi^2 t^4 K(p) + o(t^4),$$

其中 $K(p)$ 为曲面在 p 点处的高斯曲率， $o(t^4)$ 为无穷小量，即 $\lim_{t\to 0} o(t^4)/t^4 = 0$.（提示：考虑 $\sqrt{G}$ 的泰勒展开。）

(ii) 若曲面 M 具有常高斯曲率 $K \equiv 0, 1,$ or -1，请分别计算如下函数

$$f(t) := 4\pi A_t - L_t^2 - KA_t^2$$

的取值。

2024年秋 微分几何(H) 期末

1.(a) 曲率 $\bar{k}(t) = \cancel{k(t)}$ $k(-t)$，挠率 $\bar{\tau}(t) = \cancel{\tau(t)}$ $\tau(-t)$

(b) i. 错。若存在，则高斯曲率为0。而由定义，高斯曲率为1.

ii. 对。S^2上沿大圆弧的平行移动与沿该大圆弧的与球面相切的圆柱面上的平行移动相同.

iii. 错。若存在，则有整体定义的正交活动标架，由 Gauss-Bonnet

$$\int_{S^2} K\,dV = \int_{S^2} K\omega^1\wedge\omega^2 = -\int_{S^2} d\omega^2 = 0.$$

与 $K \equiv +1$ 矛盾.

(c) Liebmann定理：设M为E^3中一个紧致连通、具有常高斯曲率的曲面。则M是一个球面.

Hadamard 定理：设M为E^3中的紧致连通曲面。若M的高斯曲率处处为正，则M是凸曲面

Cohn-Vossen定理：E^3中两个等距的卵形面是合同的.

Hilbert定理：E^3中不存在常负高斯曲率的完备曲面.

2. (a) ~~若α(s)~~ 记W为Weingarten变换，则有

$$W(\alpha'(s)) = W(u'(s)r_u + v'(s)r_v) = -u'(s)n_u - v'(s)n_v$$
$$= -\frac{dn}{ds}$$

若α(s)为曲率线，则α'(s)为主方向，则 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $W(\alpha'(s)) = \lambda\alpha'(s)$

即 $-\frac{dn}{ds} = \lambda\alpha'(s)$. 从而 $\langle\frac{dn}{ds}, h(s)\rangle = \langle\lambda\alpha'(s), h(s)\rangle = 0$.

若 $\langle\frac{dn}{ds}, h(s)\rangle = 0$，又 $\langle\frac{dn}{ds}, h(s)\rangle = 0$ 知 $\frac{dn}{ds} = \lambda\alpha'(s)$ for some λ

故 α'(s)为主方向. 从而α(s)是曲率线.

(b) 回忆 $\bar{r}(s,t)=\alpha(s)+t\,n(s)$ 的高斯曲率恒为0当且仅当

$$(\alpha'(s),\ n(s),\ n'(s))=0. \qquad (*)$$

若 $\alpha(s)$ 为曲率线，由(a)，$n'(s)\,/\!/\,\alpha'(s)$ 故(*)成立，高斯曲率为0

若 (*) 成立，注意到

$\cdot\ \langle n(s),\alpha'(s)\rangle=0$

$\cdot\ \langle n(s),n'(s)\rangle=0.$

则有 $n(s)\,/\!/\,\alpha'(s)\wedge n'(s)$. 不妨设 $\lambda n(s)=\alpha'(s)\wedge n'(s)$.

故(*) $\Rightarrow\ 0=-(\alpha'(s),n'(s),n(s))=-\langle\alpha'(s)\wedge n'(s),n(s)\rangle$

$$=-\lambda$$

故 $\lambda=0$，即 $\alpha'(s)\wedge n'(s)=0\ \Rightarrow\ \alpha'(s)\,/\!/\,n'(s)$.

由(a)知，$\alpha(s)$ 为曲率线.

3. (a)
$$d\omega^1=d(\cos\varphi\,du)=-\sin\varphi\cdot\varphi_v\,dv\wedge du$$
$$=\sin\varphi\cdot\varphi_v\,du\wedge dv$$
$$=\frac{\sin\varphi\cdot\varphi_v}{\sin\varphi\cos\varphi}\omega^1\wedge\omega^2=\frac{\varphi_v}{\cos\varphi}\omega^1\wedge\omega^2$$

$$d\omega^2=d(\sin\varphi\,dv)=\cos\varphi\cdot\varphi_u\,du\wedge dv$$
$$=\frac{\cos\varphi\cdot\varphi_u}{\sin\varphi\cos\varphi}\omega^1\wedge\omega^2=\frac{\varphi_u}{\sin\varphi}\omega^1\wedge\omega^2$$

故而
$$\omega_1^2=\frac{\varphi_v}{\cos\varphi}\omega^1+\frac{\varphi_u}{\sin\varphi}\omega^2$$
$$=\varphi_v\,du+\varphi_u\,dv$$

(b) 为验证存在性，由曲面论基本定理，需验证 Codazzi 方程和 Gauss 方程.

回忆 Gauss 方程 $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$ ①

Codazzi 方程 $\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 & ② \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 & ③ \end{cases}$

对②，有 $d\omega_1^3 = d(\sin\varphi\, du) = \cos\varphi \cdot \varphi_v\, dv \wedge du = -\cos\varphi \cdot \varphi_v\, du \wedge dv$

而 $\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = (\varphi_v du + \varphi_u dv) \wedge (-\cos\varphi\, dv) = -\cos\varphi \cdot \varphi_v\, du \wedge dv$

即 $d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$

同样地，对③有 $d\omega_2^3 = d(-\cos\varphi\, dv) = \sin\varphi \cdot \varphi_u\, du \wedge dv$

而 $\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = (-\varphi_v du - \varphi_u dv) \wedge \sin\varphi\, du = -\sin\varphi \cdot \varphi_u\, dv \wedge du$
$= \sin\varphi \cdot \varphi_u\, du \wedge dv$

即 $d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3$.

即 Codazzi 方程总是满足的.

而对①，有 $d\omega_1^2 = d(\varphi_v du + \varphi_u dv) = \varphi_{vv}\, dv \wedge du + \varphi_{uu}\, du \wedge dv$
$= (\varphi_{uu} - \varphi_{vv})\, du \wedge dv$

而 $\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = \sin\varphi\, du \wedge \cos\varphi\, dv = \sin\varphi \cos\varphi\, du \wedge dv$

故 Gauss 方程满足当且仅当 $\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \sin\varphi\cos\varphi$.

又注意到 $I = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 = \cos^2\varphi\, du \otimes du + \sin^2\varphi\, dv \otimes dv$

$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ 处处正定.

由曲面论基本定理知，这存在性的充要条件是

$$\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \sin\varphi \cos\varphi$$

(c) 若存在，则 $\varphi_{uu} - \varphi_{vv} = \sin\varphi\cos\varphi$ 成立

由 $K = \dfrac{-d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \dfrac{-(\varphi_{uu} - \varphi_{vv})\, du \wedge dv}{\sin\varphi\cos\varphi\, du \wedge dv} = -1$ 知.

4. (a). 由 $\sqrt{G}(\rho,\theta)$ 的泰勒展开式

$$\sqrt{G}(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})(\rho,\theta) + \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho}(\rho,\theta)\cdot\rho$$

$$+ \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(\rho,\theta)\cdot\frac{\rho^2}{2} + \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(\rho,\theta)\cdot\frac{\rho^3}{3!}$$

$$+ o(\rho^4)$$

由 $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})(\rho,\theta) = 0$, $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho}(\rho,\theta) = 1$.

由于 $(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0$ 知 $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(\rho,\theta) = -\lim_{\rho\to 0} K(\rho,\theta)\sqrt{G}(\rho,\theta)$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0}(-K\sqrt{G})_{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\left(-K_{\rho}\sqrt{G}(\rho,\theta) - K(\sqrt{G})_{\rho}(\rho,\theta)\right)$$

$$= -K(p).$$

从而有 $\sqrt{G}(\rho,\theta) = \rho - \frac{\rho^3}{3!}K(p) + o(\rho^3)$

(b). 计算

$$A_t = \int_0^{2\pi}\int_0^t \sqrt{G}(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^t \left(\rho - \frac{\rho^3}{3!}K(p) + o(\rho^3)\right)d\rho\,d\theta$$

$$= 2\pi\left(\int_0^t \rho\,d\rho - \frac{K(p)}{6}\int_0^t \rho^3\,d\rho + \int_0^t o(\rho^3)\,d\rho\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{t^2}{2} - \frac{K(p)}{6}\cdot\frac{t^4}{4} + \int_0^t o(\rho^3)\,d\rho\right)$$

$$= \pi t^2 - \frac{\pi}{12}K(p)t^4 + \int_0^t o(\rho^3)\,d\rho.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12}K(p) = \frac{\pi t^2 - A_t}{t^4} + \frac{\int_0^t o(\rho^3)\,d\rho}{t^4} \Rightarrow K(p) = \frac{12}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\pi t^2 - A_t}{t^4}.$$

5. (a) 纬圆 $u=u_0$ 为曲线

$$c(v)=(f(u_0)\cos v,\ f(u_0)\sin v,\ u_0)$$

因为 $c'(v)=(-f(u_0)\sin v,\ f(u_0)\cos v,\ 0)$

知 $\langle c'(v), c'(v)\rangle = f(u_0)^2 \Rightarrow |c'(v)|=f(u_0)$

故弧长参数 $s=\int_0^v f(u_0)\,du = f(u_0)v.$

可弧长参数化为

$$c(s)=\left(f(u_0)\cos\frac{s}{f(u_0)},\ f(u_0)\sin\frac{s}{f(u_0)},\ u_0\right)$$

其测地曲率为

$$k_g(s)=\left\langle \frac{d^2c}{ds^2},\ n(s)\wedge c'(s)\right\rangle$$

其中 $$\frac{dc}{ds}=\left(-\cancel{f(u_0)}\sin\frac{s}{f(u_0)},\ \cos\frac{s}{f(u_0)},\ 0\right)$$

$$\frac{d^2c}{ds^2}=\left(-\frac{1}{f(u_0)}\cos\frac{s}{f(u_0)},\ -\frac{1}{f(u_0)}\sin\frac{s}{f(u_0)},\ 0\right)$$

另一方面 $$n(u,v)=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\frac{(f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ 1)\wedge(-f\sin v, f\cos v, 0)}{|r_u\wedge r_v|}$$

$$=\frac{(-f\cos v,\ -f\sin v,\ ff')}{\sqrt{f^2+f^2(f')^2}}=\frac{(-\cos v,\ -\sin v,\ f'(u))}{\sqrt{1+(f')^2}}$$

从而 $$n(s)=\frac{\left(-\cos\frac{s}{f(u_0)},\ -\sin\frac{s}{f(u_0)},\ f'(u_0)\right)}{\sqrt{1+(f'(u_0))^2}}$$

$n(s)\wedge c'(s)$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+f'(u_0)^2}}\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\cos\frac{s}{f(u_0)} & -\sin\frac{s}{f(u_0)} & f'(u_0)\\ -\sin\frac{s}{f(u_0)} & \cos\frac{s}{f(u_0)} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+f'(u_0)^2}}\left(-f'(u_0)\cos\frac{s}{f(u_0)},\ -f'(u_0)\sin\frac{s}{f(u_0)},\ -1\right)$$

这意味着 $k_g(s)=\frac{1}{\sqrt{1+f'(u_0)^2}}\cdot\left(\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}\right)$

故而纬圆 $u=u_0$ 为测地线 $\Leftrightarrow k_g(s)=0 \Leftrightarrow f'(u_0)=0$.

(b) 我们首先计算 E, F, G, L, M, N 如下.

$$r_u=(f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ 1)$$
$$r_{uu}=(f''(u)\cos v,\ f''(u)\sin v,\ 0)$$
$$r_{uv}=(-f'(u)\sin v,\ f'(u)\cos v,\ 0)$$
$$r_v=(-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)$$
$$r_{vv}=(-f(u)\cos v,\ -f(u)\sin v,\ 0)$$

回忆上面 $n=\frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}(-\cos v,\ -\sin v,\ f'(u))$

注意 $f(u)=\cosh u$, $f'(u)=\sinh u$. $1+f'(u)^2=\cosh^2(u)$

从而 $E=\langle r_u, r_u\rangle = 1+f'(u)^2=\cosh^2 u$

$$F=\langle r_u, r_v\rangle = 0$$
$$G=\langle r_v, r_v\rangle = f(u)^2=\cosh^2(u)$$
$$L=\langle r_{uu}, n\rangle=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u}}(-f''(u))=-1$$
$$M=\langle r_{uv}, n\rangle = 0$$
$$N=\langle r_{vv}, n\rangle=\frac{1}{\cosh u}(f(u))=1$$

Weingarten 变换在 $\{r_u, r_v\}$ 下之矩阵表示

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u}\end{pmatrix}$$

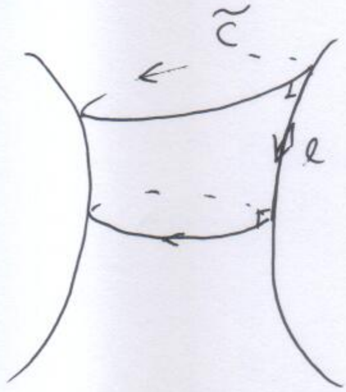
因此, 主曲率为 $k_1=-\frac{1}{\cosh^2 u}$, $k_2=\frac{1}{\cosh^2 u}$, 高斯曲率 $K=k_1k_2=-\frac{1}{\cosh^4 u}$

渐近方向 $\pm\left(\frac{r_u}{|r_u|}\pm\frac{r_v}{|r_v|}\right)$.

(c). ~~由(a)知~~ 注意到 $f'(u)=\sinh u=0 \Leftrightarrow u=0$

由(a)知纬圆中只有 $u=0$ 为测地线. 这证明了存在性.

下证唯一性. 设有另一条闭测地线 $\tilde{C}$



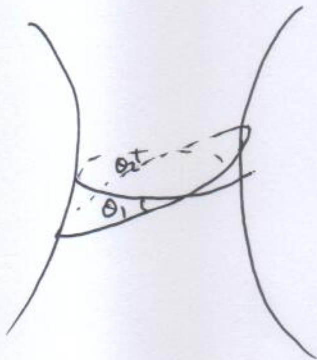
(i) 若 $u=0$ 与 $\tilde{C}$ 不相交

则对 $u=0$ 和 $\tilde{C}$ 所围区域

应用 Gauss-Bonnet 公式有

$$\int K\,dV+\int_{l}k_g\,ds+\int_{-l}k_g\,ds+2\pi=2\pi$$

$$\Rightarrow\quad \int K\,dV=0 \quad \text{与 } K=-\frac{1}{\cosh^4 u}<0 \text{ 矛盾.}$$



(ii) 若 $u=0$ 与 $\tilde{C}$ 相交.

由高斯-博内公式得

$$\int K\,dV+\theta_1+\theta_2=2\pi$$

显见 $\theta_1+\theta_2<2\pi$ 知 $\int K\,dV=2\pi-\theta_1-\theta_2>0$

与 $K=-\frac{1}{\cosh^4 u}<0$ 矛盾.

也有同学用极值原理证出来了