中国科学技术大学

(开卷考可携带任何纸质资料)

1.(20')设$\{U_{n,0},U_{n,1},\cdots,U_{n,n}\}$为平面上$n+1$个点.对第$i$个点$(1\le i\le n)$ $U_{n,i}$,定义$p_i=P(U_{n,i}$与$U_{n,0}$相连$)$,$p_i\in(0,1)$,$X_{n,i}=I(U_{n,i}$与$U_{n,0}$相连$)$,$X_n=\sum_{i=1}^{n}X_{n,i}$.设$\mathrm{Var}X_n\to+\infty$.求证:

(1) $\frac{X_n}{EX_n}\xrightarrow{P}1$;(2) $\frac{X_n-EX_n}{\sqrt{\mathrm{Var}X_n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

2.(10')设$\{X_{ni},n=1,2,\cdots;1\le i\le k_n\}$为一列独立组列.求证$\max_{1\le i\le k_n}|X_{ni}|\xrightarrow{P}0$等价于$\sum P(|X_{ni}|>\varepsilon)\to0$.

3.(10')设$X_1,\cdots,X_n,\cdots$为一列i.i.d. r.v.,$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.求证$\forall x\in\mathbb{R}$,$P(|S_n-x|<\varepsilon,\ i.o.)\in\{0,1\}$.

4.(30')设$X_1,\cdots,X_n,\cdots$为一列i.i.d. r.v.,服从分布$P(|X|\ge x)=x^{-\alpha}$,$|x|\ge1$,$\alpha>0$为常数.

注:此处还需假设是对称分布

1101C-08 201412·2500

(1) 求 $E|X|^r$，其中 $r>0$.

(2) 求 $\{c_n\}$ 使得 $\frac{S_n}{c_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

(3) 是否存在 $\{b_n\} \uparrow +\infty$ 使得 $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$?

(4) 若 $\alpha>2$. 求证存在 $\{c_n\}$ 使 $\frac{S_n}{c_n} \xrightarrow{P} 0$ 但不 a.s. 收敛到 0.

5. (20') 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ i.i.d. , $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=1/2$.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$. $T_a=\inf\{n: S_n=a\}$, $a\in \mathbb{Z}$.

(1) 求证 T_a 是停时，且 $T_a<+\infty$ a.s.

(2) 设 $a<0<b$，定义 $T=T_a\wedge T_b$.

(i) 求证 T 是停时. (ii) 求 ET 及 $P(T_b<T_a)$.

6. (10') 设 $X_n \xrightarrow{d} X$，$Y_n \xrightarrow{d} X$，X 是正态 r.v. (1) 举例说明

$X_n-Y_n \xrightarrow{P} 0$ 可以不成立. (2) 若 $X_n \geq Y_n$ $\forall n$，则 $X_n \xrightarrow{P} Y_n$.