23 数理统计期中残卷

NULIOUS

1. 设从总体

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	$3\theta/4$	$\theta/4$	2θ	$1-3\theta$

（其中 $0<\theta<1/3$ ）中抽取的一个简单样本 $X_1,\ldots,X_n$ ，试

（1）将样本分布表示为指数族自然形式，指出自然参数及自然参数空间。

（2）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ ，其是否为一致最小方差无偏估计？

（3）证明 $\hat{\theta}$ 具有相合性和渐近正态性。

解：（1）样本联合密度为

$$f\left(x_1\cdots,x_n;\theta\right)=\left(\frac{3\theta}{4}\right)^{n_0}\left(\frac{\theta}{4}\right)^{n_1}\cdot(2\theta)^{n_2}\cdot(1-3\theta)^{n_3}$$

这里 n_i 为 n 个样本中取值为 i 的个数，把样本联合密度写成指数族的形式为

$$f\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_1}\cdot 2^{n_2}\cdot e^{(n-n_3)\ln\theta+n_3\ln(1-3\theta)}$$

其中

$$h(\boldsymbol{X})=\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0}\left(\frac{1}{4}\right)^{n_1}2^{n_2}$$
$$C(\theta)=e^{n\ln\theta}$$

自然参数为 $\varphi=\ln\frac{1-3\theta}{\theta}$

又 $0<\theta<\frac{1}{3}$，则自然参数空间为 $\mathbb{R}$

由因子分解定理和自然参数空间有内点，充分完全统计量为 $T(\boldsymbol{X})=n_3$

（2）

$$\ln f\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)\propto(n-n_3)\ln\theta+n_3\ln(1-3\theta)$$

令

$$\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}=\frac{n-n_3}{\theta}-\frac{3n_3}{1-3\theta}=0$$

解得

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{n-n_3}{3n}$$

又 $n_3\sim\mathrm{B}(n,1-3\theta)$

$$\mathbb{E}[n_3]=n(1-3\theta)\quad\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_{MLE}\right]=\theta$$

也就是 MLE 为无偏估计量，且它是充分完全统计量的函数，则其为 UMVUE

（3）相合性：

强相合：注意

$$n_3 \sim \mathrm{B}(n, 1-3\theta)$$

为 n 个 $\mathrm{B}(1, 1-3\theta)$ 的独立和

由 SLLN

$$\frac{n_3}{n} \xrightarrow{a.s.} 1-3\theta$$

则

$$\frac{n-n_3}{3n} \xrightarrow{a.s.} \theta$$

即强相合

弱相合：

i. 直接由强相合得到

ii. 由 Chebyshev 不等式

$$P\left(\mid \hat{\theta}_{MLE} - \theta \mid \geq \epsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)}{\epsilon^2}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\hat{\theta}_{MLE}) = \operatorname{Var}\left(\frac{n-n_3}{3n}\right) & = \operatorname{Var}\left(\frac{n_3}{3n}\right) \\ = \frac{1}{9n^2}\operatorname{Var}\left(n_3\right) & = \frac{\theta(1-3\theta)}{3n} \end{aligned}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_{MLE} - \theta| \geq \varepsilon) \leqslant \frac{\theta(1-3\theta)}{3n\varepsilon^2} \to 0$$

就说明了弱收敛

渐进正态性：

i.MLE 的渐近正态性

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{MLE} - \theta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

这里总体（单个样本）的 Fisher 信息量为

$$I(\theta) = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2}]$$

其中 $f(x,\theta)$ 为总体的密度

$$\mathbb{E}[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2}] = \ln'' f(x=0,\theta)P(X=0) + \cdots + \ln'' f(x=3,\theta)P(X=3)$$

得到

$$I(\theta) = \frac{3}{\theta} + \frac{9}{1-3\theta}$$

则

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{MLE} - \theta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta(1-3\theta)}{3}\right)$$

ii.CLT

$$\sqrt{n}\left(\frac{n_3}{n} - (1-3\theta)\right) \xrightarrow{D} N(0, (1-3\theta)3\theta)$$

则

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{MLE} - \theta\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta(1-3\theta)}{3}\right)$$

附表：$u_{0.025} = 1.960, u_{0.05} = 1.645, \Phi(1.36) = 0.9131, \Phi(1.4) = 0.9192.$