中国科学技术大学

2021 级统计学专业《实用随机过程》期中考试试题

(考试时间：2023-05-06)

1. (总 18 分, 每小题 6 分) 设顾客到达某个商店的规律可以用参数 $\lambda = 1$ 的齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 来描述, 时间单位为小时. 已知前 1 个小时仅有内 2 位顾客到达.
   (1) 求第 2 个小时内有 3 位顾客到达的概率;
   (2) 求这 2 位顾客都是在前 20 分钟到达的概率;
   (3) 求至少有一位顾客是在前 20 分钟到达的概率.

2. (15 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda = 1$ 的齐次 Poisson 过程, 事件发生时刻序列记为 $\{S_n, n \geq 1\}$. 求
$$\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right], \quad \mathsf{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right).$$

3. (总 38 分, 前 3 题每小题 6 分, 后 2 小题每题 10 分) 假设冲击按参数为 $\lambda = 1$ 的 Poisson 过程发生，且假设每次冲击独立地以概率 p 引起系统失效. 以 M_r 记使得系统第 r 次失效的冲击数, T_r 表示系统第 r 次失效的时刻, 其中 $r \geq 1$ 为整数.
   (1) 求 M_2 的概率分布;
   (2) 给定 $M_2 = n \geq 2$, 求 T_2 的条件分布;
   (3) 求 $\mathsf{P}(M_2 = n | T_2 = t)$, 其中 $n \geq 2$;
   (4) 求 $\mathsf{P}(M_r = n | T_r = t)$, 其中 $n \geq r \geq 3$;
   (5) 假设每次冲击造成系统的损失为 c_1 元, 若造成系统失效，则还需要额外的 c_2 元维修损失费. 记 $R(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段冲击造成系统总的损失费, 求 $\lim_{t\to\infty} R(t)/t$.

4. (14 分) 设一个元件的工作过程可以用更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 来描述, 更新间隔序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, 共同分布 F 具有非格子点性质, 且满足 $\mathsf{E}[X_1] = 1$, $\mathsf{E}[X_1^3] = 3$, 记 $Y(t)$ 为元件于时刻 t 的剩余寿命, 求 $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}[Y^2(t)]$.

5. (15 分) 观察一列独立同分布的离散随机变量 $W_1, W_2, \ldots$, 等待花样 “22322” 的发生. 设
$$\mathsf{P}(W_1 = 0) = \mathsf{P}(W_1 = 1) = \frac{1}{8}, \quad \mathsf{P}(W_1 = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(W_1 = 3) = \frac{1}{4},$$
求等待花样 “22322” 首次发生所需要的期望时间.

2021《实用随机过程》期中考试试题解答

1. (总 18 分, 每小题 6 分) 解: (1) 利用独立增量性质得

$$\mathsf{P}(N(2)-N(1)=3|N(1)=2)=\mathsf{P}(N(2)-N(1)=3)=\frac{1}{6}\lambda^3e^{-\lambda}=\frac{1}{6e}.$$

(2)+(3) 利用 $[(S_1,S_2)|N(1)=2]\stackrel{d}{=}(U_{1:2},U_{2:2})$, 其中 U_1,U_2 iid $\sim U(0,1)$. 于是,

$$\mathsf{P}\left(S_1\le\frac{1}{3},S_2\le\frac{1}{3}|N(1)=2\right)=\mathsf{P}\left(U_1\le\frac{1}{3},U_2\le\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}.$$

$$\mathsf{P}\left(S_1\le\frac{1}{3}|N(1)=2\right)=1-\mathsf{P}\left(U_1>\frac{1}{3},U_2>\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}.$$

2. (15 分) 解: 设 $\{U_k,k\ge1\}$ iid $\sim U(0,\pi/2)$, 则先证

$$\sum_{k=1}^{N(\pi/2)}\sin(S_k)\stackrel{d}{=}\sum_{k=1}^{N(\pi/2)}\sin(U_k).$$

注意到右端为复合 Poisson 过程. 于是

$$\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N(\pi/2)}\sin(S_k)\right]=\frac{\lambda\pi}{2}\mathsf{E}[\sin(U_1)]=\lambda=1,$$

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(\pi/2)}g(S_k)\right)=\frac{\lambda\pi}{2}\mathsf{E}[g^2(U_1)]=\lambda\int_0^{\pi/2}\sin^2x dx=\frac{\lambda\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

3. (总 38 分, 前 3 题每小题 6 分, 后 2 小题每题 10 分) 解: (1) 首先, $M_2\sim\mathrm{NB}(2,p)$ 服从参数为 $(2,p)$ 的负二项分布，取值于 $\{2,3,\dots\}$, 即

$$\mathsf{P}(M_2=n)=\binom{n-1}{1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},\quad n\ge2.$$

(2) 利用 $[T_2|M_2=n]=[S_n|M_2=n]=S_n\sim\Gamma(n,1)$.

(3) 记 $g_{T_2|M_2}(t|n)$ 为 $[T_2|M_2=n]$ 的条件概率密度函数, 则由 (2) 得

$$g_{T_2|M_2}(t|n)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}.$$

对 M_2 取条件，由 (2) 可以得到 T 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}g_{T_2}(t)&=\sum_{k=2}^{\infty}g_{T_2|M_2}(t|k)\cdot\mathsf{P}(M_2=k)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\cdot(k-1)p^2(1-p)^{k-2}=p^2\lambda^2te^{-\lambda tp}.\end{aligned}$$

于是, 当 $n \geq 2$ 时,

$$\mathsf{P}(M_2 = n | T_2 = t) = \frac{g_{T_2|M_2}(t|n) \cdot \mathsf{P}(M_2 = n)}{g_{T_2}(t)} = \frac{[\lambda t(1-p)]^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-\lambda t(1-p)\}.$$

(4) 考虑 Poisson 过程事件分类，任意时刻 s 发生的冲击事件以概率 p 划为 I 型事件 (造成系统失效), 以概率 $1-p$ 划为 II 型事件 (未造成系统失效). 分别以 $N_i(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段 i 型事件发生的个数. 给定 $T_r = t$ 表示系统于时刻 t 第 r 次失效, 且第 r 个 I-型事件一定发生于时刻 t, t 之前的冲击个数应该为 $N_2(t) + r - 1$, 即

$$[M_r - (r-1) | T_r = t] = N_2(t) \sim \mathrm{Poi}(\lambda t(1-p)).$$

于是，

$$\mathsf{P}(M_r = n | T_r = t) = \mathsf{P}(N_2(t) = n - r \cancel{+1}) = \frac{[\lambda(1-p)t]^{n-r\cancel{+1}}}{(n-r\cancel{+1})!} \exp\{-\lambda(1-p)t\}.$$

(5) 引进一个更新酬劳过程, 每当冲击造成系统失效, 则称一个更新发生, 该时刻称为更新点. 此时, 一个更新间隔长度 T 与 T_1 同分布, 一个更新间隔里总的酬劳 R 与 $c_1 M_1 + c_2$. 注意到

$$\mathsf{E}[T_1] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i\right] = \frac{1}{\lambda p}, \quad \mathsf{E}[R] = c_1 \mathsf{E}[M_1] + c_2 = \frac{c_1}{p} + c_2,$$

其中 $\{X_k\}$ 为冲击到达间隔. 于是, 利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathsf{E}[T_1]}{\mathsf{E}[R]} = c_1\lambda + c_2\lambda p = c_1 + c_2 p.$$

4. (14 分) 证法一: 记 $h(t) = \mathsf{E}[(X-t)_+^2]$, 其中 $X \sim F$, 则 $\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}s = \mathsf{E}[X^3]/3$. 对 t 之前最后一次更新发生时刻 $S_{N(t)}$ 取条件得

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[Y^2(t)] &= \mathsf{E}[Y^2(t) | S_{N(t)} = 0] \cdot \overline{F}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathsf{E}[Y^2(t) | S_{N(t)} = y] \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\
&= \mathsf{E}[(X-t)^2 | X > t] \overline{F}(t) \\
&\quad + \int_0^t \mathsf{E}[(X-(t-y))^2 | X > t-y] \overline{F}(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \\
&= h(t) + \int_0^t h(t-y)\,\mathrm{d}m(y) \longrightarrow \frac{\mathsf{E}X^3}{3\mu} = 1.
\end{aligned}$$

证法二: 对首次更新发生时刻 X_1 取条件，得

$$\mathsf{E}[Y^2(t)] = \mathsf{E}[Y^2(t)|X_1 > t] \cdot \overline{F}(t) + \int_0^t \mathsf{E}[Y^2(t)|X_1 = y] dF(y).$$

记 $h(t) = \mathsf{E}[(X-t)_+^2]$，$g(t) = \mathsf{E}[Y^2(t)]$, 则

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-y)\,\mathrm{d}F(y).$$

因此，

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-y)\,\mathrm{d}m(y).$$

余下同证法一. ∎

5. (15 分) 解法一: 构造标准更新酬劳过程 $\{X_n, n \geq 1\}$ 如下：首次出现的花样 "22322" 时刻称为首次更新时刻: 从该时刻以后开始（不考虑该时刻及其以前的历史）再次出现该花样的时刻称为第二次更新时刻; 如此下去。每个更新区间里的酬劳并不是于更新点给付的，如果在任何时刻 i 出现上述花样 (此时考虑该时刻所有的历史)，则给付酬劳 $R_i = 1$ 个单位. 在利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}[R_1 + R_2 + \cdots + R_n]}{n} = \frac{\mathsf{E}R}{\mathsf{E}T}, \tag{*.1}$$

其中 $\mathsf{E}T$ 和 $\mathsf{E}R$ 分别表示期望更新间隔时和在一个更新间隔时里的期望酬劳。另一方面，$R_j = 0, \forall j = 1, \ldots, 4$; $\mathsf{E}R_i = 1/64, \forall i \geq 5$,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}R &= 1 + \sum_{j=1}^{4} \mathsf{E}[\text{在一个更新之后的第}j\text{ 时刻的酬劳}] \\ &= 1 + \left[0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right] \end{aligned}$$

于是利用 (*.1) 可求出 $\mathsf{E}T = 64[1 + 1/16 + 1/32] = 70$.

解法二: 设 T_2 为首次出现花样 "2" 的时刻, 设 $T_{22|2}$ 为在出现 "2" 条件下等待花样 "22" 出现所需要的额外时间, $T_{22322|22}$ 为在出现 "22" 条件下花样 "22322" 出现所需要的额外投掷次数, 则首次出现花样 "22322" 所需要的时间

$$T_{22322} = T_2 + T_{22|2} + T_{22322|22},$$

其中 $T_2, T_{22|2}$ 和 $T_{22322|22}$ 相互独立. 于是利用 (延迟) 更新过程的理论可求出

$$\mathsf{E}T_2 = 2, \qquad \mathsf{E}T_{22|2} = 4, \qquad \mathsf{E}T_{22322|22} = 64,$$

所以 $\mathsf{E}T_{22322} = 2 + 4 + 64 = 70$. ∎