微分方程概论 23 期末部分解析

一.

Peano 存在定理+$\varepsilon-\delta$ 语言叙述解对初值的连续依赖性

二.

计算

三.

三阶矩阵常系数微分方程组的初值问题

四.　（本题第二部分解答来自 24 第六次习题课讲义）

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

其中 l 为绳长　m 为质量　 g 为重力加速度　μ 为阻力系数。

（1） μ=0 时画出方程的相图

（2） $\mu\geq 0$ 时讨论方程零解的稳定性

解：

（1）也就是求 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ 的相图，不妨把 $\frac{g}{l}$ 记成 k

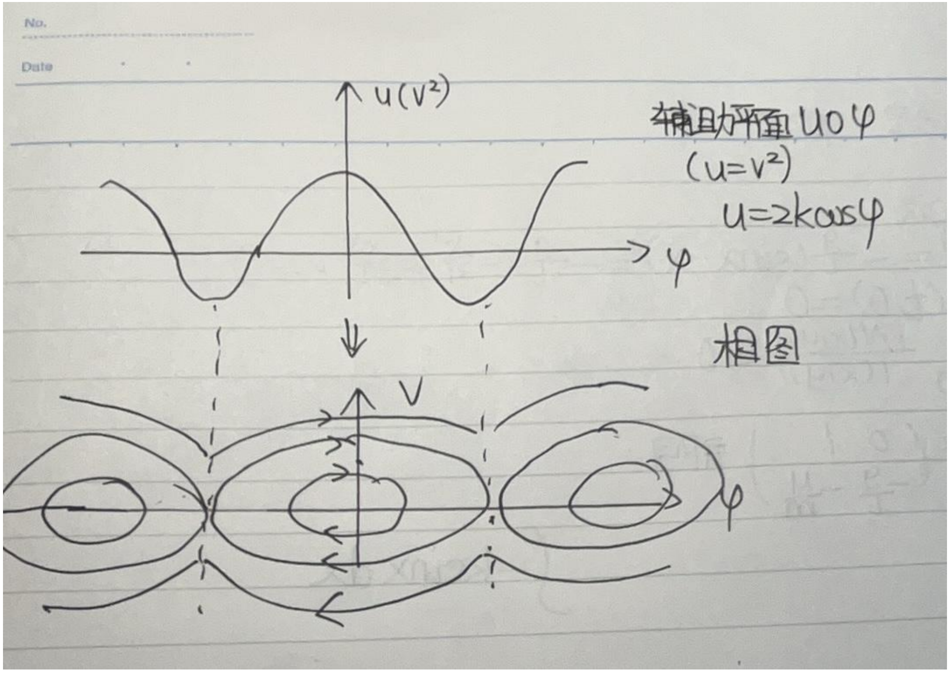
仿照书上 5.1 节做法

做换元 $v=\frac{d\varphi}{dt}$

$vdv =- k\sin\varphi d\varphi$

最后得到 $v^2 = 2k\cos\varphi + C$

相图如下：



（2）法一：（Lyapunov 函数）

$$\text{取 } V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1-\cos x) \quad \textit{满足 } V(0,0) = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot \dot{y} = \frac{g}{l}y\sin x - \frac{y}{l}y\sin x - \frac{\mu}{m}y^2$$

当无阻力时 $(\mu = 0)$：有 $\frac{dV}{dt} \equiv 0$ 故零解是稳定的

当有阻力时（$\mu > 0$）：$\frac{dV}{dt}$ 为常负（见书上定义）。由于满足 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的集合是 $y = 0$ ，而在原点邻域中 $y = 0$ 直线上除了零解 $x = 0, y = 0$ 之外不含有方程组的整条正半轨线，又由补充定理可以知道是渐近稳

定的

补充定理：（王高雄 P270 定理 5）

如果存在定正函数$V(x)$，其通过方程组的全导数 $\frac{dv}{dt}$ 为常负。但使 $\frac{dv(x)}{dt}=0$ 的点 x 的集合中除了零解外不包括方程组的整条正半轨线，则零解是渐近稳定的

法二（线性近似）

将方程组写成 $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y-\frac{g}{l}(\sin x-x)\end{cases}$

考虑线性近似方程组 $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y\end{cases}$

非线性项：

$$N(x,y)=-\frac{g}{l}(\sin x-x)=-\frac{g}{l}\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)$$

满足$N(t,0)=0$；$\lim\limits_{|(x,y)|\to 0}\frac{|N(x,y)|}{|(x,y)|}=0$

考虑 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m}\end{pmatrix}$ 特征值即可

特征值为$\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}}$

$\mu>0$ 时：特征值均有负实部，则零解渐近稳定

$\mu=0$ 时：特征值为纯虚数，无法判断非线性方程组是否稳定

五.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(2y-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=y(3-4x)\end{cases}$$

且 $\varphi(t)=\binom{x(t)}{y(t)}$ 为方程周期为 ω 的解

求证： $\int_0^\omega \frac{\varphi(t)}{\omega}dt=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

证：先证 $\int_0^\omega \frac{x(t)}{\omega}dt=\frac{3}{4}$.

我们考虑将 $x(t)$ 降次为某个函数的导数

$\dfrac{dy}{dt}=y(3-4x)$ 移项得到 $\dfrac{dy}{y}=(3-4x)dt.$

$\Rightarrow d(\ln|y|)=(3-4x)dt.$

$\Rightarrow xdt=\dfrac{3dt-d(\ln|y|)}{4}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^\omega xdt \quad &=\int_0^\omega \frac{3}{4}dt-\frac{1}{4}\int_0^w d(\ln|y|).\\ &=\frac{3}{4}\omega-\frac{1}{4}\ln|y|\Big|_0^w\end{aligned}$$

注意条件给出 $y(t)$ 周期为 $\omega\Rightarrow y(\omega)=y(0)$ 则 $\int_0^\omega xdt=\frac{3}{4}\omega$

另一边同理 $\int_0^\omega ydt=\frac{1}{2}\omega$

六.

考虑非齐次线性方程组

$$x' = Ax + F(x)$$

F 连续且 $\int_{x0}^{+\infty} \parallel F(x) \parallel dx$ 有界，设其有基本解组 $\Phi(t)$

（1）求证：若 $\parallel \Phi(t) \parallel$ 有界，则任意解在 $[0, +\infty]$ 有界

（2）求证：若 $\lim_{t\to+\infty} \parallel \Phi(t) \parallel = 0$ 则任意解趋于 0

证（1）通解 $x(t) = \Phi(t)\left(c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds\right)$.

只需证 $\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds$ 有界

又 $\Phi(t)$ 有界 $\Rightarrow$ 其元素有界 $\Rightarrow A_{ij}$ 有界且 $\det(\Phi)$ 有界且 $\det(\Phi) \neq 0$

又$\Phi(t)\Phi^*(t) = \det(\Phi) I$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{\Phi^*(t)}{\det(\Phi)}$ 有界 M

$\int_{x_0}^{+\infty} \parallel F(x) \parallel dx$ 有界 $\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \parallel F(x) \parallel dx$ 有界

则 $\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) F(s) ds \leq M \int_{t_0}^{t} F(s) ds$ 有界

（2）仿照 1 证明$\Phi^{-1}(t)$ 在 $t \to +\infty$ 有界即可