中科大2023年秋数学分析(B3)期中考试

考试时间: 11月14日9:45—11:45

姓名：____________ 学号：______________ 得分：______

$\mathbb{N}$为正整数集合, $\mathbb{Q}$为有理数集合, $\mathbb{R}$为实数集合。所有函数均取实值。

1. (10分) 证明: $\mathbb{R}$上的函数$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$的导函数在原点处不连续。

2. (12分) 设实数列$\{x_n\}$的任意子列都有收敛子列。判断$\{x_n\}$是否有界，并说明理由。

3. (12分) 写出集合$[0,1]\backslash\mathbb{Q}$的可数开覆盖, 它没有有限子覆盖。

4. (30分) 设f,g为$\mathbb{R}$上的2π周期函数，且在一个周期上黎曼可积。定义f与g的周期卷积$f*g$ 为$f*g(x)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$. 称如下三角函数列

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\cdots,\cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

中元素的有限实线性组合为*三角多项式*.

4A f与任何三角多项式的周期卷积仍为三角多项式。

4B 写出一列三角多项式$\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 对于任意$n$以及任意$0<\delta<\pi$成立:

$$\begin{cases} 0\le K_n(x), \\ 1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\mathrm{d}x, \\ 0=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\le|y|\le\pi}K_n(y)\mathrm{d}y. \end{cases}$$

4C 设f在$\mathbb{R}$上连续可微。证明: 任给$\epsilon>0$, 存在三角多项式T, 对于任意$x\in\mathbb{R}$, 成立$|f(x)-T(x)|+|f'(x)-T'(x)|<\epsilon$。

5. (12分) 设$\{x_n\}$为$[0,\, 1]$中的点列, f为$[0,\, 1]$上的连续函数。证明

$$f\left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) \le \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

并写出使得严格的不等号成立的例子。

6. (12分) 设D为$\mathbb{R}$的非空子集。设D上的函数列$\{f_n\}$逐点收敛于D上的函数f, 并且对于任意$x \in D$与任意收敛于x的点列$\{x_n\} \subset D$, 成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

证明: f连续。

7. (12分) 设$f : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$单调递增。证明: 存在$0 \le c \le 1$使得$f(c) = c$。

参考答案与评分标准

1. 计算得

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad \text{(4 points)},$$

从而$f'(x)$在$x=0$的极限不存在(3分)，故它在该点不连续(3分)。

2. $\{x_n\}$必定有界(6分)。至少有如下两种证明方法。

法一 用反证法。若不然，不妨设它有子列发散到$+\infty$, 那么这个子列没有收敛子列，矛盾(6 分)。

法二 还可用上、下极限证明。取$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\limsup_{n\to\infty} x_n.$$

另一方面，由于$\{x_{n_k}\}$有收敛子列，从而它本身收敛，从而$\limsup_{n\to\infty} x_n$属于$\mathbb{R}$(4分)。类似可证$\liminf_{n\to\infty} x_n$属于$\mathbb{R}$，因此$\{x_n\}$有界(2分)。

3. 构造可数开覆盖的方法不唯一。造对了就给全分，否则零分。可如下构造: $(-\infty,\, 1/2-1/n)\cup(1/2+1/n,\, +\infty)$, $\quad n=1,2,\cdots$。

4. 4A、4B分别是8分，4C为14分。证明概要如下。

4A 将三角函数的和角公式代入周期卷积的被积函数里即可(8分)。

4B Fejér核$\left\{K_n(t)=\dfrac{1}{2n+2}\left(\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ 即为所求(8 分)。

4C 由Fejér定理，$T_n:=f*K_n$为一致收敛于f的三角多项式(3分)。
模仿课本定理15.44的证明，得到T_n'等于$f'*K_n$(8分)。
又由Fejér定理知$T_n'(x)=f'*K_n(x)$一致收敛于$f'(x)$(3分)。

5. 证明不等式8分，举例4分。

- 取子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$\limsup_{n\to\infty} x_n \in [0,\,1]$。由$f$连续，要证的不等式左边等于$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$(4分)。由上极限的定义得
$$f\left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \le \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \quad (4\text{ points}).$$
- 取$f(x) = 1 - x$，取$\{x_n\}$形如$0, 1, 0, 1, \cdots$，那么$0 < 1$(4分)。

6. 这题从课本定理15.36的证明改编而来，以下叙述证明概要。
任给$x \in D$，任给$D \ni x_n \to x$(2分)。
任给$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_k}\}$, 成立$f_{n_k}(x_n) \to f(x)$(4分)。
选正整数列$k_1 < k_2 < \cdots \nearrow +\infty$，对于任意$n$，成立
$$|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n} \quad (3\text{ point}).$$
最后, $|f(x_n) - f(x)| \le |f(x_n) - f_{n_k}(x_n)| + |f_{k_n}(x_n) - f(x)| \to 0$ (3分)。

7. 不妨设$f(0) > 0$, 令$c := \sup\{x \in [0,\,1] \,:\, f(x) \ge x\}$，断言$f(c) = c$(6分)。
事实上，取$\{x_n\} \subset [0,\,1]$，使得$f(x_n) \ge x_n$且$x_n \nearrow c - 0$。由f单调增，得
$$c \leftarrow x_n \le f(x_n) \nearrow f(c-0) \le f(c),$$
从而得$f(c) \ge c$(3分)。
若$f(c) > c$，因为$f(1) \le 1$, 知$c < 1$。由f单调增，存在$f(c) - c > \delta > 0$，对于任意$x \in (c,\,c+\delta)$，成立$f(x) \ge f(c) > c + \delta > x$，矛盾(3分)。