线性代数 B2 23 年期末

一. 填空

1. 设线性变换$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & c \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$，在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $(a,b,c) =$__________

解：(1,0,0)

线性变换在两组基下的矩阵相似，所以他们的迹相等，则 a = 1

另外他们的秩也相等，则 b = c = 0

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的正交相抵标准型为__________

解：$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{19+\sqrt{145}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{19-\sqrt{145}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

注意审题，正交相抵标准型就是要求其奇异值

我们有 $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

计算其特征值有 $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \frac{19+\sqrt{145}}{2}$ $\lambda_3 = \frac{19-\sqrt{145}}{2}$

最后别忘记开根号

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ 的正交相抵标准型为__________

解：$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2}\\ 0 & \frac{-\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

这是一道填空题，按理来说这应该是规范阵

验证有 $A^TA=AA^T=9I$

那我们只用计算 A 的特征值即可

$$\lambda_1=-3,\lambda_2=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i,\lambda_3=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$$

结果为：$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2}\\ 0 & \frac{-\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

4. 设 V 为区间 $[0,1]$ 上连续函数全体按照内积 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ 构成的欧氏空间，$W=\langle 1,x,x^2\rangle$ 是 V 的子空间，则函数 $f(x)=x^3$ 在W上的正交投影为_________

解：$\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{20}$

注意要求正交投影要构造 $W=\langle 1,x,x^2\rangle$ 的一组标准正交基，过程略

5. 设 $V=\langle\cos(x),\cos(2x),\ldots,\cos(nx)\rangle$，求 V 的一组基 $\{\alpha_1=\cos(x),\alpha_2=\cos(2x),\ldots,\alpha_n=\cos(nx)\}$ 的对偶基_________

解：设 $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ 为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ 的对偶基．由 $f_i(\cos(jx))=\delta_{ij}$ 对 $p(x)=\sum_{j=1}^{n}p_j\sin(jx)\in V$ ，有

$$f_i(p)=\sum_{i=1}^{\pi}p_jf_i(\alpha_j)=p_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p(x)\cos(ix)dx.$$

二.

给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\3&-6&5\end{pmatrix}$

（1）求多项式矩阵 $\lambda I-A$ 的行列式因子，不变因子，初等因子组及 Smith 标准型

（2）求 A 的 Jordan 标准型

解：Smith 标准型为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}$

Jordan 标准型为 $J=(J_2(2),2)$

三．$\mathcal{A}$ 为有限维线性空间 V 上的线性变换，且 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$

求证：$V=\operatorname{Im}(\mathcal{A})\oplus\ker(\mathcal{A})$

证：先证明 $r(\mathcal{A})-r(\mathcal{A}^2)=\dim(\ker\mathcal{A}\cap\operatorname{Im}(\mathcal{A}))$

考虑$\mathcal{A}$在 $\operatorname{Im}(\mathcal{A})$上的限制：$\mathcal{A}|\operatorname{Im}\mathcal{A}:\operatorname{Im}\mathcal{A}\to V$

有维数公式：则 $\dim ker\mathcal{A}|\operatorname{Im}\mathcal{A}=\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}-\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}|\operatorname{Im}\mathcal{A}$

其中 $\ker\mathcal{A}|\mathrm{Im}\mathcal{A} = \ker\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}$ $\quad$ $\dim\mathrm{Im}\mathcal{A} = r(\mathcal{A})$

$\mathrm{Im}\mathcal{A}|\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathcal{A}^2(V)$，则 $\dim\mathrm{Im}(\mathcal{A}^2) = r(\mathcal{A}^2)$

代入得到 $r(\mathcal{A}) - r(\mathcal{A}^2) = \dim(\ker\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A})$

这样我们就证明了直和

又由维数公式 $\dim V = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \oplus \ker(\mathcal{A}))$ ，这就说明了两边相等，证毕

四. 设 $M: = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 为线性空间 V 的一组基,$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathcal{A}$在M下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）求$\mathcal{A}$的特征多项式，最小多项式及 Jordan 标准型

（2）求$\mathcal{A}$的特征子空间

（3）求证：如果W是$\mathcal{A}$的三维不变子空间，则W包含$\mathcal{A}$的所有特征子空间

解：

（1）显然按照行列式展开有特征值 1 和 2（均为两重）

$\varphi_{\mathcal{A}}(x) = (x-1)^2(x-2)^2$

简单验证得到 $d_{\mathcal{A}}(x)=(x-1)^2(x-2)^2$

$J=\operatorname{diag}(J_2(1),J_2(2))$

（2）

$\lambda=1$ 有特征向量 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 有特征向量 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$的特征子空间就是由这两个向量分别生成的子空间

（3）

我们先证明一个引理：

如果W是$\mathcal{A}$的不变子空间，那么W是$f(\mathcal{A})$的不变子空间，这里f是任意多项式

证：这是因为 $\operatorname{Im}\left(\mathcal{A}^k\right)\subseteq\operatorname{Im}(\mathcal{A})$且$V$的任意一个子空间都是数乘变换的不变子空间

我们再证明第三问，首先特征值 1 和 2 的根子空间都是二维的（代数重数都是 2）

由引理我们知道W是$\mathcal{A}-\lambda I$的不变子空间

事实上，W是$\mathcal{A}-\lambda I$的不变子空间等价于W是$\mathcal{A}$的不变子空间，因为存在一个一次的多项式使得$f(\mathcal{A}-\lambda I)$=$\mathcal{A}$，由此自然推出：

如果W不包含$\mathcal{A}$的所有特征子空间，那么一定有某个特征值的特征子空间不在W中，这个特征子空间同时是$\mathcal{A}$与$\mathcal{A}-\lambda I$的不变子空间，进而这个特征值对应的根子空间不在W中（否则取根子空间任意一个向量，它经过$\mathcal{A}-\lambda I$作用后一定是特征向量，不包含在W中，那么就与W是不变子空间矛盾了）

注意 $\dim V=4$， $\dim W=3$， $\dim W_\lambda=2$ 且 $\dim(W\cap W_\lambda)=0$

且$W+W_\lambda$是V的子空间，但是

$\dim(W+W_\lambda)=\dim W+\dim W_\lambda-\dim(W\cap W_\lambda)=5>\dim V$

矛盾，可知结论成立

五．求证：实方阵 A 为规范方阵的充分必要条件是存在实系数多项式 $f(x)$ 使得 $A^T=f(A)$

($\Leftarrow$) 注意到A与自己的任意正整数次幂是可交换的且与I可交换，进而与$f(A)$是可交换的

($\Rightarrow$) 新书上给出了复方阵类似结论，见例 5.4.4

我们证明实方阵情况：

A规范则有正交相似标准型，存在正交阵O使得

$$B = OAO^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ & & \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix} & & \\ & & & \lambda_{2k+1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

我们想要的是对角阵而不是准对角阵，因为我们想使用一个引理

引理：

若O为正交阵，A为对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，$B = OAO^T$，那么对任意多项式$f(x)$有

$$f(B) = f(OAO^T) = Of(A)O^T = O\mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)\big)O^T$$

证：注意正交阵性质及对角阵性质立得

又注意到

$B + B^T = \mathrm{diag}(2a_1 I_{n1}, \cdots, 2a_k I_{nk}, 2\lambda_{2k+1}, \cdots, 2\lambda_n)$ 为对角阵

这既符合了引理的形式，又因为加上的是B（可以看作B自己的一个多项式），不会干扰最终的结论

另外，我们不妨设a_1，……，a_k，λ_{2k+1}，⋯⋯，λ_n都两两不同（如果相同我们把他们合成一个大对角块即可）

并记为$B + B^T = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_{\mathrm{m}})$ （这里角标不同是因为有二阶及以上的块）

又$A_1,\cdots,A_{\mathrm{m}}$特征值两两不同，那么他们的特征多项式两两互素，考虑中国剩余定理

我们有同余方程

$$\begin{cases} f(x) \equiv 2a_1 \bmod \varphi_{A_1}(x) \\ f(x) \equiv 2a_k \bmod \varphi_{A_k}(x) \\ f(x) \equiv 2\lambda_{2k+1} \bmod \varphi_{A_{k+1}}(x) \\ f(x) \equiv 2\lambda_{\mathrm{n}} \bmod \varphi_{A_m}(x) \end{cases}$$ （中间各项我们省略了）

此方程必有解$f(x)$，并注意到$\varphi_{Ak}(x)$零化A_{k}，那么$f(A_{\mathrm{k}})$=$2a_k I_{nk}$（或者 $2\lambda_{\mathrm{k}}$）

也就是存在$f(x)$ $\mathrm{s.t.}$ $f(B) = B + B^T$

则 $B^T = f(B) - B \triangleq g(B)$

$g(x)$就满足要求

六．设A为 n 阶可逆实对称阵

（1）若S为 n 阶实正定对称阵，求证：AS的所有特征值都是实数

（2）设a为 n 维实单位列向量，$B = A + aa^T A^{-1}$，求证：B的所有特征值都是实数

证（1）证一：（古法硬倒）

设AS有特征值λ

则$ASx = \lambda x$　(1 式)．

注意 A，S 对称且实，取共轭转置 $x^*SA=\bar{\lambda}x^*$（2 式）

(1 式)左乘 x^*S，有$x^*SASx=\lambda x^*Sx$

(2 式)右乘Sx，有$x^*SASx=\bar{\lambda}x^*Sx$

两式相减：$(\lambda-\bar{\lambda})x^*Sx=0$

注意到S可以视为复正定 Hermite 阵

$\forall x\neq 0$ 有 $x^*Sx>0 \Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$，即特征值为实数

证二：

先证明引理：

AB与BA的非零特征值相同

证：$|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-m}|\lambda I_m-AB|$ 利用这个经典行列式结论立得，在此不详细证明了

注意到S有唯一的平方根，记为B，那么B为正定对称阵

则$AS=AB^2$，而AB^2与BAB有相同的非零特征值，另一方面BAB为对称阵，特征值都是实数

这就说明了AS的所有特征值都是实数

（2）

$B = A(I + A^{-1}aa^TA^{-1})$

注意到我们在（1）中证明完毕的结论，只需要证$I + A^{-1}aa^TA^{-1}$正定即可

$(A^{-1})^Taa^T(A^{-1})$=$A^{-1}aa^TA^{-1}$与aa^T相合，又aa^T为半正定对称阵，那么$A^{-1}aa^TA^{-1}$也为半正定阵，特征值大于等于 0

所以$I + A^{-1}aa^TA^{-1}$特征值大于等于 1，为正定阵

证毕