2023 年线性代数 (A1) 期末答案

zyx

2025 年 6 月 24 日

1a 解答. {(1,2,1),(3,4,1),(1,0,0)};{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (1,-2,1,0,0),(0,1,-2,1,0),(0,0,1,-2,1)}.

1b 解答. 由于 $rank(A-I_n)=1$, 所以存在可逆矩阵 P,Q, 使得 $A-I_n = P\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = (P(1,0,\cdots,0)^\top)((1,0,\cdots,0)Q) = \alpha\beta^\top$, 其中 $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \alpha,\beta \neq 0$. 由 A 正交, $(I_n+\alpha\beta^\top)(I_n+\beta\alpha^\top) = (I_n+\beta\alpha^\top)(I_n+\alpha\beta^\top) = I_n$, 所以 $(\beta^\top\beta)\alpha\alpha^\top = (\alpha^\top\alpha)\beta\beta^\top$. 所以由柯西不等式 $\|\alpha\|_2^4\|\beta\|_2^2 = \alpha^\top(\beta^\top\beta)\alpha\alpha^\top\alpha = \alpha^\top(\alpha^\top\alpha)\beta\beta^\top\alpha = \|\alpha\|_2^2(\langle\alpha,\beta\rangle)^2 \leq \|\alpha\|_2^4\|\beta\|_2^2$, 取等当且仅当 $\alpha=\lambda\beta, \lambda\in\mathbb{R}$. 所以 $A = I_n+\alpha\beta^\top = I_n + kuu^\top$, 其中 $k\in\mathbb{R}, u=\frac{\|\beta\|}{\|\beta\|_2}$, 代入正交性条件有 $(2k+k^2u^\top u)uu^\top = O$, 解得 $k=-2$, 即证.

2a 解答. 同 2b.

2b 解答. 由题设, $d_i - rank(A_{i+1}) = null(A_{i+1}) = rank(A_i), i=1,2,\cdots,n-1$. 所以 $\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = d_0 + (-1)^n d_n + \Sigma_{i=1}^{n-1}(-1)^i(rank(A_i)+rank(A_{i+1})) = d_0 + (-1)^n + (-1)rank(A_1) + (-1)^{n-1}rank(A_n) = 0$, 即证.

3 解答. (1) 由 Bezout 定理, $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f_1u+f_2v=g_1$. 则

$diag(f_1,f_2)\sim\begin{pmatrix} f_1 & f_1u \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} f_1 & f_1u+f_2v \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ -\frac{f_1f_2}{g_1} & 0 \end{pmatrix}\sim$ $\begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ -g_2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ -g_2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}=diag(g_1,g_2)$, 即证.

(2) $(x^3-x)^2=(x+1)^2x^2(x-1)^2, (x^2-x)^3=x^3(x-1)^3, (x^2-1)^4=(x+1)^4(x-1)^4$. 标准型为 $diag((x+1)^4x^3(x-1)^4,(x+1)^2x^2(x-1)^3,(x-1)^2)$.

4 解答. (1) 对于 B, $B=-I_n+(1,1,1)^\top(1,1,1)$, 所以 B 的相似标准型为 $diag(2,-1,-1)$. 有 $B^2-B-2I_3=O$. 假设 A^{-1} 具有与 A 类似的对称性, 设 $A^-1=\begin{pmatrix} C & D & D \\ D & C & D \\ D & D & C \end{pmatrix}$. 则 $BC+2D=I_3, BD+C+D=O$, 解得 $C=(B^2+B-2I_3)^{-1}(B+I_3)=\frac{1}{2}B^{-1}(B+I_3)=\frac{1}{4}(B+I_3), D=\frac{1}{4}(I_3-B)$.

(2) $\begin{pmatrix} I_3 & O & O \\ -I_3 & I_3 & O \\ -I_3 & O & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & I_3 & I_3 \\ I_3 & B & I_3 \\ I_3 & I_3 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_3 & O & O \\ I_3 & I_3 & O \\ I_3 & O & I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B+2I_3 & I_3 & I_3 \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} I_3 & \frac{1}{3}I_3 & \frac{1}{3}I_3 \\ O & I_3 & O \\ O & O & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B+2I_3 & I_3 & I_3 \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_3 & -\frac{1}{3}I_3 & -\frac{1}{3}I_3 \\ O & I_3 & O \\ O & O & I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B+2I_3 & O & O \\ O & B-I_3 & O \\ O & O & B-I_3 \end{pmatrix}$.

所以 A 的相似标准型为 $diag(4,1,1,1,-2,-2,1,-2,-2)$. 特征多项式为 $(x-1)^4(x+2)^4(x-4)$. 由于这个矩阵可以可以相似对角化, 所以最小多项式为 $(x-1)(x+2)(x-4)$.

5a 解答. 一方面, 若 $\mathcal{A}$ 是可对角化的, 取它的一个矩阵表示是对角阵 $\Sigma=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 则对 $v\in\mathbb{C}^n$, $(\lambda I_n-\Sigma)^2v=0 \iff diag((\lambda-\lambda_1)^2,\cdots,(\lambda-\lambda_n)^2)v=0$, λ 的特征空间和 $Ker((\lambda Id-\mathcal{A})^2)$ 都为 $Span\{e_i|\lambda=\lambda_i\}$.

另一方面, 若 $\forall i$, λ_i 的特征空间和 $Ker((\lambda_i Id-\mathcal{A})^2)$ 都为 $Span\{e_j|\lambda_i=\lambda_j\}$. 则由 Jordan 标准型, 可以取它的一个矩阵表示是 $diag(J_{\lambda_{m_1}(n_1)},\cdots,J_{\lambda_{m_k}}(n_k))$.

若 $n_j \geq 2$, 则 $\exists l, (J - \lambda_{m_j} I_n)e_l = e_{l-1}$, 而 $(J - \lambda_{m_j} I_n)^2 e_l = 0$, 矛盾!

5b 解答. 双曲线为 $y^2 + 2xy = 1$. 对应矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 特征值为 $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 半实轴长度为 $1/\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, 方向为与 λ_1 的特征向量 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)^\top$ 同方向; 半虚轴长度为 $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, 方向为与 λ_2 的特征向量 $(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, 1)^\top$ 同方向.

6a 解答. 由上课结论, 一系列可对角化的可交换的矩阵可以同时对角化, 不妨设 W 中矩阵均为对角阵, 所以 $dimW \leq n$.

6b 解答. 只需找 $C = B + I$ 使 $C^2 = A + I$. 因为 $det(I + A) = 1$, 所以 $I + A$ 无零特征值. 设 $I + A$ 的 Jordan 标准型为 $I + A = P_1^{-1} diag(J_{\lambda_1}(n_1), \cdots, J_{\lambda_k}(n_k))P_1$. 因为 $\lambda_i \neq 0$, 所以存在 $\mu_i \in \mathbb{C}, \mu_i^2 = \lambda_i$. 而由于 $J_{\mu_i}(n_i)^2$ 与 $J_{\lambda_i}(n_i)$ 相似 (考虑特征方阵的 Smith 标准型), 所以存在 $Q_{1,k}$ 使 $Q_{1,i}^{-1} J_{\mu_i}(n_i)^2 Q_{1,i} = J_{\lambda_i}(n_i)$. 则

$(P_1^{-1} diag(Q_{1,1}, \cdots, Q_{1,k})^{-1} diag(J_{\mu_1}(n_1), \cdots, J_{\mu_k}(n_k)) diag(Q_{1,1}, \cdots, Q_{1,k})P_1)^2 = I + A$, 即证.