2023 秋概率论期中答案

2024 年 10 月 28 日

1. (15 分) X_1 和 X_2 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上两个独立的随机变量且有相同的分布函数 $F(x)$，记 $U = \max\{X_1, X_2\}, V = \min\{X_1, X_2\}$。回答：

(i) 证明 U, V 也为随机变量；

(ii) 求 (U, V) 的联合分布函数。

解. (i) 设

$$U = \frac{X+Y}{2} + \left|\frac{X-Y}{2}\right|, \quad V = \frac{X+Y}{2} - \left|\frac{X-Y}{2}\right|$$

由 σ-代数性质，随机变量的加减、取绝对值后仍是随机变量，因此 U 和 V 均为随机变量。

(ii) 记

$$G(x,y) = P(U \le x, V \le y)$$

当 $y \ge x$ 时，有 $G(x,y) = P(U \le x) = F^2(x)$，因为 X_1 和 X_2 独立。

当 $y < x$ 时，有

$$G(x,y) = P(U \le y, V \le y) + P(y < U \le x, V \le y) = F^2(y) + 2(F(x) - F(y))F(y) = (2F(x) - F(y))F(y)$$

综上，得

$$G(x,y) = \begin{cases} F^2(x), & y \ge x \\ (2F(x) - F(y))F(y), & y < x \end{cases}$$

□

2. (15 分) 设 X 服从二项分布 $B(n,p)$，求 X 的概率母函数和四阶矩 $\mathbb{E}[X^4]$。

解. 设

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (ps + 1 - p)^n$$

根据概率母函数的知识，

$$a_1 = E(X) = G_X'(1) = np(ps + 1 - p)^{n-1}\Big|_{s=1} = np$$

$$a_2 = E(X(X-1)) = G_X''(1) = n(n-1)p^2(ps + 1 - p)^{n-2}\Big|_{s=1} = n(n-1)p^2$$

$$a_3 = E(X(X-1)(X-2)) = n(n-1)(n-2)p^3$$

$$a_4 = E(X(X-1)(X-2)(X-3)) = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$$

故 $E(X^4) = a_4 + 6a_3 + 7a_2 + a_1$，代入上式即可得结果。 □

3. (10 分) 对重复试验中称的抛币随机游走 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$，$S_0 = 0$，求 $\mathbb{E}[S_n]$ 和 $\mathrm{Cov}(S_m, S_n)$。

解. (i) 设

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_1) = nE(X_1) = 0$$

(ii) 假设 $n \le m$，则

$$\mathrm{Cov}(S_n, S_m) = E(S_nS_m) - E(S_n)E(S_m) = E(S_nS_m) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k \cdot \sum_{k=1}^m X_k\right)$$

$$= nE(X_1^2) + (nm-n)E(X_1X_2) = n + (nm-n)\cdot 0 = n$$

即 $\mathrm{Cov}(S_n, S_m) = \min\{m, n\}$。 □

4. (20 分) 小朋友放进池塘投掷 N 枚均匀硬币，N 服从参数为 λ 的泊松分布。记 X, Y 分别为撒出的硬币中正面和反面的个数。回答:

(i) 证明 X 和 Y 独立;

(ii) 求条件期望 $\mathbb{E}[N|X]$。

解. 这是一个经典的题目，详见教材第 3.7 节例 5:

Grimmett 3.7 节例 5. 一只母鸡产下 N 个蛋，其中 N 服从参数为 λ 的泊松分布。每个蛋以概率 $p = 1-q$ 独立孵化。令 K 为小鸡的数量。求 $\mathbb{E}(K \mid N)$, $\mathbb{E}(K)$ 和 $\mathbb{E}(N \mid K)$。

Grimmett 3.7 节例 5 的解答. 给定

$$f_N(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \quad f_{K|N}(k \mid n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

因此

$$\psi(n) = \mathbb{E}(K \mid N = n) = \sum_k k f_{K|N}(k \mid n) = pn.$$

从而 $\mathbb{E}(K \mid N) = \psi(N) = pN$ 并且

$$\mathbb{E}(K) = \mathbb{E}(\psi(N)) = p\mathbb{E}(N) = p\lambda.$$

为了求 $\mathbb{E}(N \mid K)$，我们需要知道 N 在已知 K 下的条件概率质量函数 $f_{N|K}$。然而，

$$f_{N|K}(n \mid k) = \mathbb{P}(N = n \mid K = k) = \frac{\mathbb{P}(K = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(K = k)}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}{\sum_{m\ge k}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}} \quad \text{当} n \ge k$$

$$= \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-q\lambda}.$$

因此

$$\mathbb{E}(N \mid K=k)=\sum_{n\geq k} n\frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-q\lambda},$$

得 $\mathbb{E}(N \mid K)=k+q\lambda$。 □

5. (20 分) 线性代数与概率论的关联可能催生有趣的数学问题与方法，试回答两个问题：

(i) $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为随机向量，$\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵存在并记为 $\Sigma=(\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$，这里 $\sigma_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$。证明：$\det(\Sigma)=0$ 当且仅当 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 线性相关的概率为 1，即存在不全为 0 且相等常值的 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足 $P(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n=b)=1$；

(ii) 试利用概率方法证明：总存在任意矩阵元为 $+1$ 或 -1 的方阵 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n, a_{ij}\in\{-1,1\}}$ 满足

$$\det(A)\geq\sqrt{n!}.$$

解. (i) 设 Σ 为一个对称方阵，由于 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E((X_i-EX_i)(X_j-EX_j))$，令 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 为常向量，二次型

$$\boldsymbol{a}\Sigma\boldsymbol{a}^T=E\left(\sum_{k=1}^n a_k(X_k-EX_k)\right)^2$$

故 $\boldsymbol{a}\Sigma\boldsymbol{a}^T\geq 0$，由线性代数可知 $\det(\Sigma)\geq 0$，且 $\det(\Sigma)=0 \Leftrightarrow \exists\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{a}\Sigma\boldsymbol{a}^T=0$，即 $\exists a_i$ 使得 $\sum_{k=1}^n a_kX_k\equiv\sum_{k=1}^n a_kE(X_k)$ 恒为常数，等价于 X_i 线性相关。

(ii) 取 a_{ij} 为 $\{1,-1\}$ 上的均匀分布，令 $A_{n\times n}=(a_{ij})$，定义 $X_n=\det A_{n\times n}$。下面证明 $E(X_n^2)=n!$。记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}。根据拉普拉斯展开，

$$X_n^2=(\det(A_{n\times n}))^2=\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}\right)^2$$

展开后取期望，由对称性可得期望为 0，因此 $E(X_n^2)=\sum_{j=1}^n E(A_{1j}^2)=nE(X_{n-1}^2)$。递归证明可得 $E(X_n^2)=n!$。 □

6. (20 分) 称概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为无原子的，若任给事件 $A\in\mathcal{F}$，当 $P(A)>0$ 时均存在事件 $B\subset A$ 满足

$$0<P(B)<P(A).$$

(i) 设 Ω 为有限样本空间，证明概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 不是无原子的；

(ii) 举例给出一个无原子的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，详细描述其三要素；

(iii) 对无原子的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，证明任给事件 $A\in\mathcal{F}$，$P(A)>0$ 及 $\varepsilon>0$，必存在事件 $B\subset A$ 满足

$$0<P(B)<\varepsilon.$$

解. (i) 设 Ω 是有限集，$|F|<2^{|\Omega|}$ 亦为有限。定义集合 $P=\{P(A)\mid P(A)>0, A\in F\}$，此有限集 P 中存在最小者，记为 $P(A_0)$。对任意 $B\in\Omega$，要么 $P(B)=0$，要么 $P(B)\geq P(A_0)$，与定义矛盾。

(ii) 取 $\Omega=[0,1]$，F 为其上的 Lebesgue 可测集，P 取 Lebesgue 测度。若 $P(A)>0$，则存在满足 $1/n<P(A)$ 的整数 n。考虑 $A_i=[i/n,(i+1)/n)\cap A$。由测度的可加性可得 $\sum_{i=0}^{n-1}P(A_i)=P(A)$，故存在某 i_0 满足 $0<P(A_{i_0})\leq 1/n<P(A)$，说明完毕。

(iii) 由定义，存在 $B \subseteq A$ 使得 $0 < P(B) < P(A)$。由于 $A = B \cup (B^c \cap A)$, 从而由 $P(A) = P(B) + P(B^c \cap A)$ 知 B 与 $B^c \cap A$ 中必定存在一个集合, 它的测度 $< \frac{P(A)}{2}$, 记这个集合为 $A_1 \subsetneq A$, 同样的可以得到 $A_i \subsetneq A_{i-1} \subsetneq A_{i-2} \subsetneq ... \subsetneq A$, 且 $P(A_i) < \frac{P(A)}{2^i}$. $\square$