

中科大 2023 年秋博资考

代数

- 1、令 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$ 。
 - (1) 计算 $\dim_{\mathbb{Q}} K$, $\dim_{\mathbb{Q}} E$, $\dim_{\mathbb{Q}}(K \cap E)$;
 - (2) 令 L 为 \mathbb{C} 中最小包括 K 和 E 的子域。计算并论证 $\dim_{\mathbb{Q}} L$;
 - (3) 判断并证明: $\text{Aut}(K)$ 和 $\text{Aut}(E)$ 是否同构? K 和 E 作为域呢?
- 2、令 $\mathbb{C}[x, x^{-1}] = \{\sum_n a_n x^n : n \in \mathbb{Z}, \text{求和为有限项求和}\}$ 。
 - (1) 判断并证明: $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 是否为 PID;
 - (2) 列出 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 所有素理想;
 - (3) $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 作为 $\mathbb{C}[x]$ -模是否是 Noether 模? 是否为可分模?
 - (4) 判断并证明: $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ 是否为 PID?
 - (5) 判断并证明: $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]/(x^2 + 2, 5)$ 是否为有限环? 是否为有限域?
- 3、考虑 $GL(2, \mathbb{R})$ 中由元素 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ a & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 生成的子群 G_a 。
 - (1) 是否存在整数 a 使得 G_a 是 Abel 群;
 - (2) 是否存在整数 a 使得 G_a 是有限群;
 - (3) 若 G_a 是有限群, 计算 $G_a \cap SL(2, \mathbb{R})$ 的阶。
- 4、证明: 若存在代数同态 $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_m(\mathbb{R})$, 且满足 $\varphi(\lambda I) = \lambda \varphi(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 。则有 $n|m$ 。