中国科学技术大学数学科学学院

2023学年秋季学期考试试卷

课程名称 泛函分析(H)　　课程编号 001706.01

考试时间 2024年1月12日　　考试形式 闭卷

姓名 ________　学号 ________　学院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. (12分) 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是可分Hilbert空间H中的一组正交规范基。对每个$n \in \mathbb{N}$，令$f_n = e_{n+1} - e_n$。证明：序列$f_n \rightharpoonup \theta$ $(n \to \infty)$.

二. (16分) 定义一个正数序列如下：令$x_0 > 0$是一个正实数，且令

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明：这个序列收敛，并求它的极限。

三. (16 分) 设M为Banach空间X的一个非空子集，证明：如下两条等价

1) M是X的有界集；

2) 对每个$\phi \in X^*$, 集合$\{\phi(x) : x \in M\}$是有界集。

四. (18分) 在复空间ℓ^2上定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \longmapsto \left(\frac{2x_1 + x_2}{1}, \frac{3x_2 + x_3}{2}, \cdots, \frac{(n+1)x_n + x_{n+1}}{n}, \cdots\right).$$

1. 证明：T是ℓ^2上Fredholm算子且$ind(T) = 0$.

2. 求T的谱集$\sigma(T)$和谱半径$r_\sigma(T)$.

五. (20分) 设$(X, \|\cdot\|)$是一个Banach空间。

1) 如果Y和Z是X的两个闭子空间且满足对任意$x \in X$存在唯一的表示

$$x = y + z, y \in Y, z \in Z.$$

证明：存在$k > 0$ 使得对任意$x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$均有

$$\|y\| \le k\|x\| \text{ 和 } \|z\| \le k\|x\|$$

成立。

2) 如果$T:X\to X$是一个线性算子且$D(T)=X$, $T^2=T$, 以及

$$N(T)=\{x\in X:Tx=0\}\text{ 和 }R(T)=\{Tx:x\in X\}$$

均是X的闭的线性子空间，证明：T是有界线性算子。

六. (18分) 设$(X,\|\cdot\|)$是一个实Banach空间, $0<\epsilon<1$, n是大于等于自然数以及$x_1,x_2\cdots,x_n\in X$满足$\|x_i\|=1$对每个$1\le i\le n$。证明：如果对任意$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$均有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\|\le(1+\epsilon)\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

成立，则我们有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\|\ge(1-\epsilon)\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

对任意$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$成立。