中国科学技术大学 2023-2024 秋季学期
微分流形期末考试

问题 1 (每问 3 分, 满分 30 分). 下面是对某篇论文的引言部分的中文翻译:

关于闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单的内蕴证明 (节录)

引言

C.B. 艾伦多弗和 W • 芬切尔 (Fenchel) 独立地把经典的高斯-博内公式推广到可嵌入 欧几里得空间中的闭可定向 黎曼流形。最近，艾伦多弗和韦伊又把该公式推广到闭黎曼多面体，并特别证明了它对于一般闭黎曼流形情况下的有效性。在他们的证明中仍然使用了将黎曼胞腔嵌入欧几里得空间中的方法。本文的目的是，利用微分流形 中的向量场 理论，给出该公式的一个直接的内蕴的证明。

本证明的基本思想非常简单，因此概要的说明有所帮助。令 $\mathbb{R}^n$ 为偶数 n 维的闭可定向黎曼流形。按照将详叙于后的方法，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中定义一个内蕴的 n 阶外微分形式 Ω，它当然等于 $\mathbb{R}^n$ 的不变标量乘以体积元素。问题中的高斯-博内公式断言, 这一微分形式在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分等于 $\mathbb{R}^n$ 的欧拉-庞加莱示性数 χ。为证明这一点，我们从流形 $\mathbb{R}^n$ 转到由 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量构成的 $2n-1$ 维流形 M^{2n-1}。在 M^{2n-1} 中我们证明 Ω 等于一个 $n-1$ 阶微分形式 Π 的外导数。通过定义 $\mathbb{R}^n$ 上一个带有孤立奇点的连续的单位向量场，我们得到它在 M^{2n-1} 中的像:n 维子流形 V^n，而 Ω 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分就等于 V^n 上同样的积分。利用$\boxed{\text{斯托克斯定理}}$证明，后者等于 Π 在 V^n 边界上的积分。现在，V^n 的边界正好对应于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的向量场的奇点，$\boxed{\text{一个著名的定理}}$指出它们的指标和等于 χ。经过如此解释，就可以计算 Π 在 V^n 边界上的积分，并很容易证明它等于 χ。

此方法当然可以用来导出同样类型的其他公示，并可以经过适当修改，推出黎曼多面体的高斯-博内公式。我们发表此证明，是因为我们方法的主要思想在这里是最为清晰的。进一步的结果会在以后的论文中给出。

(1) 这段文字中标记了 7 个划线的词，即“嵌入”,“可定向”,“微分流形”,“向量场”,“n 阶外微分形式”,” 欧拉-庞加莱示性数 即欧拉示性数”, 以及“外导数 即外微分”. 分别写出它们的定义.

(2) 证明过程中标记了 2 个方框，分别是”$\boxed{\text{斯托克斯定理}}$”, “$\boxed{\text{一个著名的定理}}$”，写出它们的完整陈述。

(3) 这篇文章的作者是谁？这篇文章证明的定理被称作什么定理？

问题 2 (每问 2 分, 满分 20 分). 判断题.

请在以下正确的陈述前打勾，错误的陈述前打叉。

(   ) 可逆光滑映射 $f: M \to N$ 是微分同胚当且仅当它在每点附近都是局部微分同胚.

(   ) 紧流形上的光滑函数至少有两个临界点.

(   ) 若 $f: M \to N$ 是单射浸入，则它是嵌入.

(   ) 若 X, Y 是光滑流形 M 中横截相交的光滑子流形, 则 $X \cap Y$ 是 M 中维数为 $\dim X + \dim Y - \dim M$ 的光滑子流形.

(   ) $\mathbb{RP}^4$ 上的任意光滑向量场都是完备的.

(   ) 设 H 是 G 的 Lie 子群, 而它们的 Lie 代数分别为 $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$. 若 $X \in \mathfrak{g}$ 且 $\exp(X) \in H$, 则 $X \in \mathfrak{h}$.

(   ) 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 都是不可定向流形.

(   ) 可定向带边光滑流形的边界一定是可定向无边流形.

(   ) 若 $\omega \in \Omega^k(M)$ 是恰当形式且具有紧支集, 则 $\omega \in B_c^k(M)$.

(   ) 任意连通可定向光滑流形的最高阶紧支 de Rham 上同调群一定同构与 $\mathbb{R}$.

(   ) 对于任意定向光滑流形 M, 根据 Poincare 对偶, $H_{dR}^k(M) \simeq H_c^k(M)$.

问题 3 (每问 3 分, 满分 15 分). 写出满足下面条件的例子 (无需论证).

(1) 一个是浸入而不是嵌入的映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$;

(2)$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ 上一个处处非零的向量场;

(3)$\mathbb{S}^3$ 上的一个乘法结构使之成为一个 Lie 群;

(4)$\mathbb{R}^3$ 上的一个二维不可积分布;

(5)$\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上的一个不是恰当形式的闭 1-形式;

(6) 一个具有可定向边界的连通不可定向带边流形.

问题 4 (每问 3 分, 满分 15 分). 填空, 写出最终结果 (无须计算过程)

(1) 设 $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin y \dfrac{\partial}{\partial z}, Y = xyz\dfrac{\partial}{\partial y} - e^z \dfrac{\partial}{\partial z}$, 则 $[X, Y] =$

(2) 设 $\omega = x\,\mathrm{d}x + e^{2x}\,\mathrm{d}y, \eta = -\sin(x)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$, 则 $\omega \wedge \eta =$

(3) 设 $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}, \omega = \sin(x)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + e^{2y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, 则 $\mathcal{L}_X\omega =$

(4) 设 $M = \mathbb{T}^{24}$, 则 $\dim(H^3_{\mathrm{d}R}(M)) =$

(5) 考虑映射

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, f(e^{is}, e^{it}) = (e^{i(40s-t), e^i(s+40t)}),$$

则 $\deg(f) =$

(6) 考虑映射

$$f : \mathbb{R}^3_{x,y,z} \to \mathbb{R}^2_{s,t}, f(x, y, z) = (x + y + \sin(z), x^2 + z^2),$$

则 $f^*(\,\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) =$

问题 5 (10 分). 设 $S = \{(x, y, z, w)|x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = 16, 2xy - 2zw = -16\}$.

(1) 求证:S 是 $\mathbb{R}^4$ 子流形.

(2) 求 S 在点 (2,0,2,4) 处的切空间.

问题 6 (15 分). 考虑 $G = \{\mathbf{A} \in GL(3, \mathbb{R})|\mathbf{AJA}^T = \mathbf{J}\}$, 其中 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明:G 是 Lie 群.

(2) 计算 G 的 Lie 代数.

(3)G 的维数是多少?G 是否连通, 是否紧致? 说明理由.

问题 7 (15 分). 设 M 是光滑流形, 若对于任意 x, 都指定了一个线性映射

$$J_x : T_xM \to T_xM,$$

使得 $J_x^2 = -\mathbf{I}$, 则称 J 是 M 上的一个**近复结构**.

(1) 给出近复结构光滑性的合理定义.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 写出一个近复结构, 并说明为什么 $\mathbb{R}^3$ 上不存在近复结构.

(3) 设 J 是 M 上一个光滑近复结构, 对于任意光滑向量场 V, W 定义

$$N(V, W) = [JV, JW] - J([JV, W]) - J([V, JW]) - [V, W].$$

证明:N 是函数双线性的, 即对于任意 $f, g \in C^\infty(M)$, 有 $N(fV, gW) = fgN(V, W)$.(换而言之,N 是一个张量, 称为 **Nijenhuis** 张量.)