中国科学技术大学数学科学学院

2023年秋季学期《微分几何(H)》期末考试

2024年01月16 日，19：00 - 21:00

姓名: ____________ 学号: ______________

注意事项:

1. 请将解答写在答题纸上，试卷和答题纸一并上交；
2. 试题中，$\mathbb{R}^3$等同于欧氏空间$\mathbb{E}^3$；

1. [20分] 设 $r:(0,\ell)\to\mathbb{R}^3$ 为一条弧长参数的正则曲线。记 $\kappa,\tau:(0,\ell)\to\mathbb{R}$ 分别为其曲率和挠率，其中 $\kappa>0$. 记

$$e_1(s),e_2(s),e_3(s),\ s\in(0,\ell)$$

为其Frenet标架。

(i) [5分] 写出其Frenet标架的运动方程。

(ii) [5分] 证明该曲线的主法标线 $s\mapsto e_2(s)$,$s\in(0,\ell)$是一条正则曲线。

(iii) [10分] 求该曲线的主法标线作为单位球面（取其上单位法向量为外法向）上曲线的测地曲率。

2. [20分] 设 $r:D\to\mathbb{R}^3$ 为一正则曲面。记 n 为其单位法向量， $\{r_u,r_v,n\}$ 为其自然标架。记 E,F,G,L,M,N 为其第一、第二基本形式的系数函数， K 为其高斯曲率函数。

(i) [8分] 证明

$$K\,|r_u\wedge r_v|\,\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}(Er_v-Fr_u),$$

其中 $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)$ 为将 r_u 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得向量，也即

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)=|r_u|\,\frac{r_v^{\perp}}{|r_v^{\perp}|},\ r_v^{\perp}:=r_v-\left\langle r_v,\frac{r_u}{|r_u|}\right\rangle\frac{r_u}{|r_u|}.$$

(ii) [4分] 写出Weigarten变换 $\mathcal{W}$ 在基 $\{r_u,r_v\}$ 下的矩阵表示。

(iii) [8分] 证明

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{du}r_u-\frac{D}{du}\frac{D}{dv}r_u=K\,|r_u\wedge r_v|\,\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u),$$

其中 $\frac{D}{du},\frac{D}{dv}$ 为协变导数。

3. [20 分] 设 $\mathbb{S}^2$ 为三维欧氏空间中的单位球面（作为三维欧氏空间中的整体曲面）。定义集合 $\mathbb{P}^2 := \{\{p, -p\} : p \in \mathbb{S}^2\}$。定义映射

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2 : \ p \mapsto \{p, -p\}.$$

定义 $\mathbb{P}^2$ 的子集 U 为开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 为 $\mathbb{S}^2$ 的开集。易见 $\mathbb{P}^2$ 为一抽象拓扑曲面。

(i) [8分] 说明如何选取 $\mathbb{P}^2$ 的光滑结构，使其成为一个抽象光滑曲面，且映射 f 成为光滑映射。

(ii) [5分] 计算上述光滑映射 f 的秩。

(iii) [7分] 记 g_0 为 $\mathbb{S}^2$ 的标准度量，即由三维欧氏空间度量诱导的度量。构造 $\mathbb{P}^2$ 上的黎曼度量使其具有常高斯曲率 1 。

4. [16 分] 设 $\mathbb{S}^2$ 为三维欧氏空间中的单位球面（作为三维欧氏空间中的整体曲面，设球心为原点）。

(i) [8分] 判断 $\mathbb{S}^2$ 上是否存在处处非零的光滑切向量场？如有请构造，如没有请说明理由。

(ii) [8分] 判断 $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ 上是否存在沿其上任何光滑曲线均平行的非零光滑切向量场？如有请构造，如没有请说明理由。

5. [24 分] 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一欧氏区域， $\phi : D \to (0, \frac{\pi}{2})$ 为一光滑函数。定义

$$\mathrm{I} = \cos^2 \phi du \otimes du + \sin^2 \phi dv \otimes dv,$$
$$\mathrm{II} = \sin \phi \cos \phi (du \otimes du - dv \otimes dv).$$

(i) [4分] 设若存在正则曲面片$r : D \to \mathbb{R}^3$ 以 I, II 为其第一、第二基本形式，证明

$$e_1 := \frac{r_u}{\cos \phi}, \ e_2 := \frac{r_v}{\sin \phi}$$

为其正交活动标架。

(ii) [10分] 设若存在正则曲面片$r : D \to \mathbb{R}^3$ 以 I, II 为其第一、第二基本形式，求其在(i)中正交活动标架下的五个微分 1 形式：

$$w^1, w^2, w_1^2, w_1^3, w_2^3.$$

(iii) [10 分] 给出存在正则曲面片$r : D \to \mathbb{R}^3$ 以 I, II 为其第一、第二基本形式的（ ϕ 应满足的）充要条件。