

中国科学技术大学

2023—2024学年第一学期《贝叶斯分析》期末考试试卷

一、(10分)

简答以下问题：

1. 已知正态总体 $N(\theta, 1)$ 下一组容量为16的样本均值为0.1， θ 的先验分布为无信息先验。则 θ 的95%置信区间与95%可信区间分别是多少？如何解释这两者的意义。
2. 解释显著性检验方法和贝叶斯假设检验的差异。
3. 解释贝叶斯变分法算法特点。
4. 解释贝叶斯因子的优缺点。
5. 解释先验敏感性分析的目的。

二、(20分)

设 $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ 为来自正态分布 $N(\theta, \sigma^2)$ 的简单样本，试在下述两种先验下求 θ 的后验密度：

1. (θ, σ^2) 的先验分布为Jeffreys先验；
2. (σ, σ^2) 的先验分布为正态-逆伽马先验，即 $\theta|\sigma^2 \sim N(\theta_0, k\sigma^2)$, $\sigma^2 \sim IG(a, b)$ ，其中 k, a, b 是已知参数， $IG(a, b)$ 表示逆伽马分布，密度为 $\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp(-\frac{b}{x})$ 。

三、(30分)

设二项总体 $B(1, \theta)$ 的一组容量为 n 的简单样本之和为 T ，先验分布 π 为 $Beta(0.5, 0.5)$ ，其中 $Beta(a, b)$ 的密度为 $f(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ 。试

1. 求后验最大众数 (MAP) 估计 $\hat{\theta}$, 并证明其具有后验相合性。
2. 求 θ 的 $1 - \alpha$ 可信区间, 并解释其与置信区间的区别。
3. 在加权平方损失 $L(\theta, a) = (\theta - a)^2 / \theta(1 - \theta)$ 下求 θ 的贝叶斯估计。
4. 对假设检验问题 $H_0 : \theta \leq 0.4 \leftrightarrow H_1 : \theta > 0.4$, 如果 $n = 150, T = 65$, 写出通过MCMC计算检验问题的贝叶斯因子的算法。

四、(20分)

设观测 Y 服从指数分布 $Exp(1/\beta)$ (即均值为 β 的指数分布), 且一次观测值为 5.2。若我们有先验知识 $\beta > 1$, 考虑 $\theta = 1/\beta$, 试

1. 给出 θ 的一个合理化先验。如果我们相信 β 的先验均值在 10 附近 (非常有可能在 5-15 之间), 给出 θ 先验分布中超参数的合理值。
2. 使用 Beta 分布 $q(\theta_{\text{propose}} | \theta_{\text{curr}}) = \text{Beta}(a_{\text{curr}}, b_{\text{curr}})$ 作为提议分布, 其中

$$a_{\text{curr}} = \left(\frac{1 - \theta_{\text{curr}}}{V} - \frac{1}{\theta_{\text{curr}}} \right) (\theta_{\text{curr}})^2,$$

$$b_{\text{curr}} = \left(\frac{1 - \theta_{\text{curr}}}{V} - \frac{1}{\theta_{\text{curr}}} \right) \theta_{\text{curr}} (1 - \theta_{\text{curr}}),$$

θ_{curr} 为链的当前值, $V = k\theta_{\text{curr}}(1 - \theta_{\text{curr}})$ ($0 < k < 1$ 为选定的常数)。写出从 θ 后验分布进行MCMC抽样的Metropolis-Hastings算法。

3. 若2中的接收概率过高或者过低, 如何调整算法。

五、(20分)

肺纤维化是一种由肺部瘢痕形成而引起的病因不明, 治愈方法不明的疾病。肺活量 (FVC) 计量值被用来评估患者的肺功能。在一项研究中, 176名患者在1-2年内进行了多次随访, 随访时记录了患者ID、随访周数和FVC测量值。每位患者在第-12周至133周内的特定周进行了9次随访, FVC呈现明显的随随访时间线性下降趋势。感兴趣的问题是预测患者在 $[-12, 133]$ 内任意周的FVC值及95%预测区间。

1. 假设每位患者的FVC值服从正态分布，试写出此问题的贝叶斯层次模型，解释所提模型的动机与合理性。
2. 写出所提模型下求FVC预测值及95%预测区间的MCMC计算算法。
3. 给出所提MCMC算法的收敛性诊断方法。

附录：

上分位数： $u_{0.025} = 1.96$, $u_{0.05} = 1.64$