注意：请将所有答案写在题后空白处。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

1. （20 分）(a). 叙述外测度 m_* 的定义；

(b). 叙述可测集的定义；

(c). 证明：E 是可测集当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个开集 $O \supset E$ 和一个闭集 $F \subset E$ 使得 $m_*(O - F) < \epsilon$.

2. (15 分) 设 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集且满足 $m(E) < \infty$, 叙述 E 上的 Egorov 定理，并举例说明条件 $m(E) < \infty$ 是必需的。

3. （15 分）设 $A \subset [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ 是具有正测度的可测集，证明 A 必然包含至少一个不可测子集。

4.（15 分）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续函数。

(a). 证明 f 的图 $\Gamma=\{(x,y)|y=f(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，从而是可测集；

(b). 证明 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集。

5. （15 分）若 f 为 $\mathbb{R}$ 上连续紧支撑函数，函数 f 紧支撑指集合 $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$ 的闭包为紧集. 求证:

(a). $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi x} dx$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 ξ 为自变量的连续函数。

(b). $\lim_{\xi\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

6. (10 分, Borel-Cantelli 引理) 假设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测集, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. 令 $E = \{x \in \mathbb{R}^d | x \in E_k$对无穷多个$k$成立$\}$。证明 $m(E) = 0$.

7. （10 分）运用 Borel-Cantelli 引理证明以下结论。令

$E = \{x \in \mathbb{R} |$存在无穷多有理数$\frac{p}{q}$，其中p和q互素，使得$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2.022}}\}$，

证明 $m(E) = 0$.