中国科学技术大学数学科学学院
2022学年春季学期考试试卷 (A)

课程名称 复分析 课程编号

考试时间 2022年4月23日 考试形式 闭卷

姓名________ 学号________ 学院________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

1. （15分）判断下列命题的真伪并说明理由.

(a) 若函数 f 在 Ω 上全纯, 则对 Ω 内任意简单光滑闭曲线 γ, 都有

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(b) 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 全纯, 且对任意 $n \geq 1$,

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{((n+1)z-1)^2} = 0$$

则 $f(z) \equiv 0$.

(c) 设函数 $f: B(0,1) \to B(0,1)$ 全纯, 且 $f(0)=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 中内闭一致收敛.

2. （15分）证明: 如果函数 f 和 $\bar{f}$ 都解析, 则 f 是常值函数.

3. （15分）证明代数学基本定理.

4. （15分）计算积分

$$(1)\ \int_{|z|=1} (z^2+\bar{z})dz; \qquad (2)\ \int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} \qquad (3)\ \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4+1)(z-3)}.$$

5. （15分）

(a) 写出函数 $\frac{1}{1-z}$ 和函数 $\sin z$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数.

(b) 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}dz$, 其中 $|a|<1$.

6. （15分）设 Ω 是单连通区域, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ 连续, $z_0 \in \Omega$. 此处的“连续”改成“全纯”

(a) 设 $z \in \Omega$, γ_z 是 Ω 内连接 z_0 和 z 的光滑曲线, 证明: $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$ 与 γ_z 的选取无关.

(b) 证明: F 在 Ω 全纯, 且 $F'(z) = f(z)$.

(c) 若 $0 \notin \Omega$, 证明: 存在全纯函数 $g: \Omega \to \mathbb{C}$ 满足 $e^{g(z)} = z$.

7. （10分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 全纯, $p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. 证明:

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta.$$

装订线 答题时不要超过此线