

2022 数学夏令营代数

线性代数和解析几何

每题 20 分.

1. 设 $S := \{(x, y, z) | 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ 为二次曲面. S 中包含的线性子空间的维数的最大值是多少? 写出一个这样的维数达最大的子空间.
2. 记 $sl_n := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \text{tr}(A) = 0\}$ 为迹为 0 的 n 阶实方阵形成的线性空间. 考虑 sl_n 上的对称双线性型 Q 如下:

$$Q : sl_n \times sl_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$$

求 Q 的正负惯性指数.

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实方阵, 并且对任意多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 均有 $I_n - f(A)A$ 为可逆方阵. 证明: A 为幂零方阵.
4. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 均为 n 阶实方阵. 对于任意复数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及任意正整数 m , 方阵 $(\lambda I_n - A)^m$ 和 $(\lambda I_n - B)^m$ 具有相同的秩. 证明: A 和 B 在 $\mathbb{R}$ 上相似, 即存在可逆实方阵 $P \in GL_n(\mathbb{R})$, 使得 $PAP^{-1} = B$.

近世代数

5 (15 分). 设 $A = \langle a \rangle$ 是 m 阶循环群, $B = \langle b \rangle$ 是 n 阶循环群.

(1) 说明要描述一个群同态 $f : A \rightarrow B$, 只需确定自然数 k 使得 $f(a) = b^k$ (并非所有的自然数 k 都确定一个群同态); 对于固定的自然数 k , 请描述其决定的群同态.

(2) 证明一个自然数 k 以上述方式确定一个群同态当且仅当 $n | km$.

6 (10 分). 设 R 为主理想整环, p 为 R 的素元. 证明 $R/(p)$ 是一个域.

7 (15 分). 设 R 是一个么环, 满足对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$ (这样的环称作布尔环).

- (1) 证明 R 的特征为 2.
- (2) 证明 R 是一个交换环.
- (3) 取 $a \in R$, 证明环同构 $R \cong (a) \times (1 - a)$.
- (4) 举一个非整环的布尔环的例子.
- (5) 证明 R 的每个有限生成理想是主理想.

中国科学技术大学
第十二届大学生数学夏令营

数学分析

1. (20 分) 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, 对任何 $x \in [0, 1]$ 有 $f(x) \in (0, 1)$; 并且对每个 $f'(x) \neq 1$. 求证: 在 $(0, 1)$ 中有且仅有一个 x , 使得 $f(x) = x$.

2. (20 分) 计算定积分:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

3. (20 分) 计算积分: 设圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 上被平面 $z = a$ 和 $z = b$ ($0 < a < b$) 所夹的部分是 Σ . 又设它有均匀的密度 1. 求 Σ 对原点处单位质点的引力.

4. (20 分) 若 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上定义的函数. 它关于 x 固定是 y 的连续函数, 关于 y 固定是 x 的连续函数.

(1) f 是不是二元连续函数? 证明或者举反例说明你的结论.

(2) 如果对于固定的 x , 它是 y 的单调函数, 求证: f 是二元连续函数.

实变函数

5. (10 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 在任何区间上都是绝对连续函数, 求证: f 将 Lebesgue 零测集映射为 Lebesgue 零测集.

6. (10 分) 设 $A \in [0, 1]$ 满足

$$1 = m_*(A) + m_*([0, 1] \setminus A).$$

其中 m_* 表示 Lebesgue 外测度. 求证: A 可测.

(提示一种可行的思路: 考虑找到一个开集 O , 和一个紧集 K , 使得 $K \subset A \subset O$, 而且 $O - K$ 的测度可以任意小. 这两个集合分别利用 A 和 $[0, 1] \setminus A$ 的外测度定义找到.)

7. (共 20 分) 设函数列 f_k 在 $[a, b]$ 上几乎处处收敛于 f , 而且对于某个 $r > 0$ 和任意 k , 有

$$\int_a^b |f_k(x)|^r dx \leq M < +\infty.$$

求证 (10 分): 对于任何 $0 < p < r$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

问 (10 分): 如果将上述 $[a, b]$ 改成 $\mathbb{R}$, 对应的结论是不是还成立? 证明或者举例说明你的结论.

中国科学技术大学 第十二届大学生数学夏令营

微分几何

1. (10 分) 设 S 为正则光滑曲面, P 为其上一点. 记 $k_n(\theta)$ 为点 P 处沿方向 θ (这里 $\theta \in [0, 2\pi)$ 为与主方向的夹角) 的法曲率, 并记 H 为曲面 S 在点 P 处的平均曲率. 假定 $H \neq 0$. 试计算:

$$\frac{1}{H} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) d\theta.$$

2. (15 分) 设 S 为正则光滑曲面. 试在测地平行坐标系 (u, v) 下考虑如下问题:

- 1) 计算克里斯托夫符号 Γ_{jk}^i 并写出测地线方程.
- 2) 计算高斯曲率 $K(u, v)$.

这里我们回顾到 S 上的第 I 基本形式在测地平行坐标系下有形状

$$I = (du)^2 + G(u, v) (dv)^2.$$

3. (15 分) 记 S^2 为三维欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中球心在原点的单位球面.

- 1) 判断 $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ 上是否存在光滑的单位切向量场. 如有请构造, 如没有请证明之.
- 2) 判断 $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ 上是否存在沿 $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ 上任意光滑曲线均平行的非零光滑切向量场. 如有请构造, 如没有请证明之.

复分析

1. (15 分) 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$ 的收敛域是右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, 并且对任何 $\varepsilon > 0$, 它在 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \varepsilon\}$ 上一致收敛.

2. (15 分) 用留数定理计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx.$$

3. (10 分) 证明或否定: 对每个正整数 n , 存在整函数 f_n 满足

$$\max_{1 \leq |z| \leq 2} |\operatorname{Re} f_n(z) - \log |z|| < \frac{1}{n}.$$