2022 秋高等概率论期末 · 王世花（超温柔）

1.（作业一第 5 题）

设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的某些集类，则对任意 $A \subset \Omega$ 定义:

$$A \cap \mathcal{C} = \{A \cap B; B \in \mathcal{C}\}$$

记 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 为 $A \cap \mathcal{C}$ 在 A 上生成的 σ 代数，证明:

$$\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) = A \cap \sigma(\mathcal{C})$$

2.(作业二第 13 题)

设 X 为只取正整数值的可积随机变量。证明:

$$\mathbb{E}[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

如果 X 仅是非负可积的随机变量，则有

$$\mathbb{E}[x] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$$

其中 $F(x), x > 0$, 是 X 的分布函数。

3.(作业四第 9 题)

设 $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 定义条件方差 $Var(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2]$, 其中 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 是任意 σ 代数。证明:

(1)$Var(X) = \mathbb{E}[Var(x|\mathcal{G})] + Var(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$

(2) 如果 σ 代数 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$，则 $\mathbb{E}[Var(x|\mathcal{G}_2)] \leq \mathbb{E}[Var(x|\mathcal{G}_1)]$

4.（就这道不是作业题）

X, X_n 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量。证明 $X_n \xrightarrow{L_1} X$ 等价于:

$$\limsup_{A \in \mathcal{F}} \left| \int X_n d\mathbb{P} - \int X d\mathbb{P} \right| \to 0$$

5.(作业四第 3 题 + 作业五第 17 题)

(1) 设 $X_1, ..., X_n$ 是一列 iid 的随机变量，令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 求 $\mathbb{E}[X_j|S_n], j = 1, 2, ..., n$

(2) 同（1），证明若 $\mathbb{E}[X_1]$ 存在，则 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致可积。