

2022 实用随机过程期中考试试卷

1. (总 16 分, 每小题 4 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda = 2$ 的齐次 Poisson 过程, 以 S_n 表示第 n 个事件发生时刻。

- (1) 求 $E[N(4) - N(2) | N(1) = 5]$ 。
- (2) 给定 $N(5) = 10$, 求 $N(2)$ 的条件分布。
- (3) 求 $E[S_5 | N(1) = 2]$ 。
- (4) 求 $\text{Cov}(N(6), N(10))$ 。

2. (总 25 分, 每小题 5 分) 假设男性顾客和女性顾客分别以速率 λ_1 和 λ_2 独立地进入某个酒店, 而每个男顾客和女顾客会购物的概率分别为 p_1 和 p_2 , 且与其他人相互独立。其中, $p_1 > 0, p_2 > 0$ 。

(1) 设 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止会购物顾客的人数, 问 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个 Poisson 过程吗? 若是, 则写出其速率; 若否, 请说明理由。

- (2) 试求第 1 位会购物的顾客是女性的概率。
- (3) 试求在第 1 个男顾客进入酒店之前已进入该酒店的女性顾客数的分布律。
- (4) 试求在第 1 个会购物的男顾客进入酒店之前已进入该酒店的女性顾客数的分布律。
- (5) 假设 $\lambda_2 = 8, p_2 = \frac{1}{2}$, 且会购物的女性顾客以概率 $\frac{1}{4}$ 采购 1 元的商品, 以概率 $\frac{3}{4}$ 采购 2 元的商品。以 $S(t)$ 表示时刻 t 之前到达的女性顾客采购的商品总金额, 求 $P(S(1) = 4)$ 。

3. (总 20 分, 每小题 5 分) 某公司的一部售后服务电话的呼叫次数服从速率为 λ 的 Poisson 过程, 通话时间 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列独立随机变量, 且均服从参数为 μ 的指数分布。假设这部售后服务电话在通话时, 其它电话打不进来, 而空闲时一定会接听呼叫电话。以 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止电话打进来的次数。(呼叫速度单位: 次/分钟。通话时间单位: 分钟。)

- (1) 问 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是何种随机过程? 请说明理由。
- (2) 试求一次通话时没能打进来的电话的平均次数。
- (3) 对充分大的 t , 试求时刻 t 电话处于通话中的概率。
- (4) 试求下列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t}$$

4. (总 24 分, 每种解法各 12 分) 现考虑一系列独立重复试验, 每次试验抛掷一枚均匀的骰子, 以 W_n 表示第 n 次抛骰子掷出的点数。试验一直进行到连续抛出四个点数同奇数或者同偶数为止。试用两种不同的方法求抛掷次数 T 的期望。

5. (总 15 分, 第 1 小题 5 分, 第二小题每种解法各 5 分) 现考虑独立重复试验, 每次试验抛掷一枚均匀骰子, 试验一直进行到抛出点数 6 为止。记 N 为抛掷骰子的总次数, S 为到试验结束时累计抛出的点数之和。

- (1) 当 $n > 1$ 时, 求 $E[S|N = n]$ 。
- (2) 试用两种方法求 $E[S]$ 。