中科大2022年秋数学分析(B3)期中考试

考试时间: 11.08. 9:45—11:45

姓名：________________ 学号：____________________ 得分：________

$\mathbb{N}$为正整数集合, $\mathbb{Z}$为整数集合, $\mathbb{Q}$为有理数集合, $\mathbb{R}$为实数集合.

1. (10分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$并用$\epsilon-\delta$ 语言写出详细过程。

2. (10分)直接写出集合$(0, 1)$的可数开覆盖, 它没有有限子覆盖。

3. (12分) 设$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$为单射. 求极限$\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n)$并说明理由。

4. (12分)设f为开区间I上的单调增函数并且$f(I)$也是开区间。证明f连续。

5. (12分) 设$[a, b]$为紧致区间。证明: 存在由$[a, b]$上的多项式构成的可数集合$\mathcal{P}$，对于任意$[a, b]$上的实值连续函数f，成立

$$\inf\left\{\sup_{x\in[a,\,b]} |f(x)-Q(x)| : Q \in \mathcal{P}\right\} = 0.$$

6. (18分) 设D为$\mathbb{R}$的不可数子集，设函数列$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足:

   - (逐点有界) 对任意$x \in D$, 存在实数$M(x)$使得$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \le M(x)$;
   - (逐点等度连续) 对于任意$x \in D$与任意$\epsilon > 0$, 存在与x和ϵ都有关的$\delta > 0$, 使得对于所有k和D中与x距离小于δ的y, 都有$|f_k(y) - f_k(x)| < \epsilon$.

   证明如下两个结论:

   (a) D有可数稠密子集E;

   (b) 存在$\{f_k\}$的子列$\{f_{n_k}\}$在D上逐点收敛。

7. (16分) 设f是$\mathbb{R}$上的2π周期、实值连续函数，它的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big).$$

称实数列$\{x_n\}$速降，是指对于任意$A > 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} n^A x_n = 0.$$

证明: f在$\mathbb{R}$上任意次连续可微当且仅当$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为速降数列。

8. (10分) 设1是实直线上函数(x)的周期，且(x)还满足

$$(x) := \begin{cases} x & \text{if } -1/2 < x < 1/2; \\ 0 & \text{if } \quad x = 1/2. \end{cases}$$

   (a) 对于$k \in \mathbb{N}$, 求函数(kx)的不连续点集合并求它在每个不连续点处的左右极限。

   (b) 记$\mathcal{O}$为所有奇整数的集合。证明黎曼函数

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

   的不连续点集合恰为$D := \left\{ \dfrac{p}{2k} : k \in \mathbb{N},\, p \in \mathcal{O} \right\}$, 并求它在每个不连续点处的跳跃。

   提示: $1 + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$.

参考答案与评分标准

1. 0. 答案对就给5分。过程5分，按步骤酌情给分。

2. $(1/3, 2/3), (1/4, 3/4), (1/5, 4/5), \cdots$ 为所求的可数开覆盖。答对就给10分，否则零分。

3. $+\infty$, 答案对就给6分。过程6分，按步骤酌情给分。

4. (反证法) 假设$x \in I$是f的不连续点，不妨设f单调增。那么必定成立如下关系

$$f(x-0) < f(x+0), \quad f(x) \in [f(x-0), f(x+0)] \quad \text{(6 points)}.$$

又由于f单调增, 那么$f(I) \subset (-\infty, f(x-0)] \cup [f(x+0), +\infty) \cup \{f(x)\}$。从而$f(x)$属于开区间$f(I)$, 却找不到$f(x)$的邻域含于$f(I)$。矛盾! (6分)

5. 取$\mathcal{P}$为有理数系数多项式全体，那么它为可数集合(6分)。
利用Weierstrass一致逼近定理，证明$\mathcal{P}$即为所求(6分)。

6. (a)是习题14.4:5(2) (6分). (b)是习题15.2:31的改编(12分)。

7. 当$f \in C^\infty$, 利用分部积分可证a_n, b_n具有速降性质(6分)。
设a_n, b_n速降。那么当$n \to \infty$时它们都是$O(1/n^2)$； 由Weierstrass判别法f的傅立叶级数在$\mathbb{R}$上一致收敛于2π周期连续函数$\tilde{f}$。(3分)
由一致收敛性以及a_n, b_n的积分表达，得f与$\tilde{f}$有公共的傅立叶级数，从而它们相等。(3分)
再由a_n, b_n速降，利用Weierstrass判别法以及求导与级数求和的交换性质，我们得到: 对于任意$k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$是三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \Big(a_n \cos^{(k)} nx + b_n \sin^{(k)} nx \Big)$$

的一致极限。(4分)

8. (a) (kx)的不连续点集合为$\{\frac{p}{2k} : p \in \mathcal{O}\}$, 并且$(kx)$在每个不连续点处的值为0, 左极限为1/2, 右极限为$-1/2$。(2分)

(b) 由Weierstrass判别法，得定义黎曼函数$R(x)$的函数项级数在$\mathbb{R}$上一致收敛。(2分)
任取$x_0 \notin D$, 由于每个(kx)都在x_0处连续，所以$R(x)$亦在x_0处连续。(2分)
任取$x_0 = \frac{p}{2k}$($p \in \mathcal{O}$、$k \in \mathbb{N}$且p与k互素)，那么成立如下两个等式，

$$
\begin{aligned}
R(x_0+0) &= R(x_0) - \frac{1}{2k^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = R(x_0) - \frac{\pi^2}{16k^2}, \\
R(x_0-0) &= R(x_0) + \frac{1}{2k^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = R(x_0) + \frac{\pi^2}{16k^2},
\end{aligned}
$$

从而得到黎曼函数R在x_0处的跳跃等于$\frac{\pi^2}{8k^2}$。我们只证明第二个等式。任取正整数ℓ, 由(a)容易观察到: (ℓx)在x_0跳跃当且仅当ℓ是k的奇数倍。设$\ell = nk$, $n \in \mathbb{N}$, 那么成立

$$
(\ell x_0) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} (\ell x) = \begin{cases} 1/2 & \text{if} \quad n \in \mathcal{O}; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

因为定义黎曼函数$R(x)$的函数项级数一致收敛，我们有

$$
\begin{aligned}
R(x_0-0) &= \sum_{\ell \in \mathbb{N},\, k \nmid \ell} \frac{(\ell x_0)}{\ell^2} + \sum_{\ell \in \mathbb{N},\, k | \ell} \frac{1}{\ell^2} \lim_{x \to x_0 - 0} (\ell x) \; (\text{Exercise15.2} : 9) \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{(\ell x_0)}{\ell^2} + \sum_{\ell \in \mathbb{N},\, \frac{\ell}{k} \in \mathcal{O}} \frac{1}{2\ell^2} \\
&= R(x_0) + \frac{1}{2k^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) \\
&= R(x_0) + \frac{\pi^2}{16k^2} \quad (4 \text{ points}).
\end{aligned}
$$