2022 年数学分析 A3 期中回忆版

授课教师：李思敏、左达峰；整理人：朱葛瑄

2024 年 1 月 27 日

一. 讨论级数或无穷乘积敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos(n)$$

$$\Pi_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]^p$$

二. 判断级数的收敛性和绝对收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$$

三. 讨论函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的连续性和可微性。

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$$

四. 求幂级数的收敛区间和在其内的和函数。注意收敛区间的定义!! 很多在这里扣分

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$$

五. 求函数在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式。

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{x=0}\\ \frac{1}{x}\int_0^x\frac{sin^2(t)}{t^2}dt & \text{x!=0}\end{cases}$$

六. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，试证：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^n e^t dt$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。

七. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0$，试证：存在奇数次多项式（非常数项的次数为奇数）列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致逼近于 $f(x)$。

八. 给出如下假设:

- 每个给定的 $n\in N$，$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 连续;
- 每个给定的 $x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

证明存在 $[a,b]$ 中的一个小区间，使函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在此小区间上一致有界。