线性代数 B2 22-23 期末解析

一.

1.$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为________，最小多项式为

_________，奇异值为_______

解：$\text{diag}\left(J_2(1),J_2(1)\right)$ ； $(x-1)^2$ ；略

特征值显然均为 1

且 $\text{rank}\,(A-I)=2$ $\text{rank}\,(A-I)^2=0$

那么 $J=\text{diag}\left(J_2(1),J_2(1)\right)$

最小多项式显然为 $d_A(x)=(x-1)^2$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&2&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}$$

$\varphi_{A^TA}(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1$

给出近似解：$\lambda_1=0.382$(二重) $\lambda_2=2.62$ $\lambda_3=\frac{2184}{987}$

最后别忘记开根号

2.$A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ 的正交相似标准型为_________

解：$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & \sqrt{5}\\ 0 & -\sqrt{5} & -2\end{pmatrix}$

注意A不是反对称阵，但是经检验他是规范阵($A^TA=AA^T=9I$)

那么只需要求其特征值即可

有 $\lambda=3$ 或 $-2\pm\sqrt{5}i$

则正交相似标准型为$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & \sqrt{5}\\ 0 & -\sqrt{5} & -2\end{pmatrix}$

3. 酉空间 $\mathbb{C}^3$ 中内积为标准内积，即 $(x,y)=x^*y$，对向量组 $\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ 做正交化得到的一组标准正交基为_________

解：$\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ i\end{pmatrix}$ $\frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$

在酉空间中我们一定要注意内积定义，酉空间内积有两种定义方式

（1）$(u,v)=u^*Gv$ 时，这里G为复正定阵，对一组基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 做 Schmidt 正交化

先有 $\beta_i=\alpha_i-\frac{(\beta_1,\alpha_i)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\beta_{i-1},\alpha_i)}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$

在对 β_n 做标准化即可

（2）$(u,v)=uGv^*$ 时，这里G为复正定阵，对一组基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 做

Schmidt 正交化

先有 $\beta_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$

（这是我们在欧氏空间常常写作的样子，但是在欧氏空间内积是对称的）

再对 β_n 做标准化即可

注：或者我们可以边做正交化边标准化，这里我们拿欧氏空间举例（酉空间形式是相似的，不过要注意内积定义），对一组基 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 做 Schmidt 正交化

$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}\}$ 是 $\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}\}$标准化得到的

则 $\beta_n = \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_n,\gamma_i)\gamma_i$

再对β_n标准化即可

二. 设α是欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个单位向量，记矩阵$H = I_n - 2\alpha\alpha^T$

定义映射$\mathcal{H}: x \in \mathbb{R}^n \to Hx \in \mathbb{R}^n$，求证：$\mathcal{H}$是（关于某个 n-1 维超平面的）反射变换

证：首先求其特征值

由 $|I_m - AB| = \lambda^{m-n}|I_n - BA|$

$\mathcal{H}$的特征多项式为 $\det((\lambda-1)I_n+2\alpha\alpha^T) = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1+2) = (\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1)$

则其特征值为 1（n − 1 重）和−1（一重）

下面再证明$\mathcal{H}$是正交变换

$$
\begin{aligned}
HH^T &= (I_n-2\alpha\alpha^T)(I_n-2\alpha\alpha^T)\\
&= I_n-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T\\
&= I_n
\end{aligned}
$$

又正交阵H有正交相似标准型，且其特征值无虚数，那么它可以相似对角化，也就是说$\mathbb{R}^n$可以分解成H的特征子空间的直和

注意H为正交阵，不同特征值对应的特征向量正交，我们可以取特征值为 1 的特征子空间一组标准正交基（不然可以标准正交化），再取特征值为−1 的特征子空间的一个单位向量，把这两个向量组合并，这样我们就取得了$\mathbb{R}^n$一组标准正交基，也就是说映射$\mathcal{H}$把$\mathbb{R}^n$中一个方向上的向量变为反向，其他方向的向量不变，特征值为−1 的特征向量就是题目中 n-1 维超平面的法向量

三. 给定矩阵 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times p}$。定义线性映射$\mathcal{A}: x\in F^n\to Ax\in F^m$与$\mathcal{B}: y\in F^p\to By\in F^n$。记$U=\ker(\mathcal{A}\mathcal{B})$，求证：$\mathrm{Im}(\mathcal{B}|u)\subset\ker(\mathcal{A})$并由此证明 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$

证：考虑限制 $\mathcal{B}: \ker(\mathcal{A}\mathcal{B})\to F^n$

设 $\alpha \in \ker(\mathcal{AB})$. 则 $\mathcal{AB}\alpha = 0$ 那么 $\alpha \in \ker(\mathcal{A})$

即 $\mathrm{Im}(\mathcal{B}|u) \subset \ker(\mathcal{A})$

有 $\dim\ker(\mathcal{A}) \geq \dim\mathrm{Im}(\mathcal{B}|u)$

分别考虑以下的维数公式：

对$\mathcal{A}$有 $\dim\ker\mathcal{A} + \dim\mathrm{Im}\mathcal{A} = n$

对限制 $\mathcal{B}: \ker(\mathcal{AB}) \to F^n$有

$\dim\ \mathrm{Im}(\mathcal{B})|\ker(\mathcal{AB}) = \dim\ker(\mathcal{AB}) - \dim\ker(\mathcal{B})|\ker(\mathcal{AB})$

对$\mathcal{AB}$有 $\dim\ker(\mathcal{AB}) = p - r(AB)$

又 $\ker(\mathcal{B}) \subset \ker(\mathcal{AB})$， $\ker(\mathcal{B})|\ker(\mathcal{AB}) = \ker(\mathcal{B})$

对$\mathcal{B}$有 $\dim\ker(\mathcal{B}) = p - r(B)$

逐个代入就有结果 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

四. 设$\mathcal{A}$是欧氏空间 V 上的规范变换，$W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，求证 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

证：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 W 的一组标准正交基，将其扩充为 V 的一组标准正交基 $M := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. 由于 W 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，所以

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, A_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$. 由于 $\mathcal{A}$ 为规范变换，故 $\mathcal{A}$ 在 M 下的矩阵为规范矩阵，从而 $A_{12} = 0$. 于是

$$\mathcal{A}(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)A_{22}$$

因此，$W^\perp = \langle \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \rangle$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

这里我们用到了一个引理：

设实分块方阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ 或 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. 则 A 为规范方阵当且仅当 $A_{12} = 0$ （或 $A_{21} = 0$ ），且 A_{11}, A_{22} 为规范方阵

证：比较A^TA与AA^T两边元素易得

五．设A为 n 阶实对称半正定方阵，且A的对角元全为 0，求证：$A = 0$

证：半正定 $\Rightarrow$ 各阶主子式非负

先考虑一个对角元 a_{ii}

取二阶主子式，并考虑对称性 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = 0 - a_{ij}^2 \geq 0$

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = 0 \quad \forall j$ 成立

又每个对角元均为 0

则 $a_{ij} = 0\ \forall i，j$ 成立

就有$A=0$

六．A为 n 阶复方阵，记 $Z(A)=\{B|AB=BA\}$ ，求证：$Z(A)$ 是复线性空间，且下列条件等价

（1）$\dim Z(A)=n$

（2）A的最小多项式$d_A(x)$等于其特征多项式$\varphi_A(x)$

（3）$Z(A)$中任意矩阵B都可以写成A的多项式的形式

证：先证明复线性空间

首先 $0, I\in Z(A)$

又$\forall X,Y\in Z(A)$ $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

$A(\lambda X+\mu Y)=\lambda AX+\mu AY=\lambda XA+\mu YA=(\lambda X+\mu Y)A$

$\Rightarrow$ 复线性空间

这三条等价关系的核心是第二条

先给出要使用的书上有理标准型的定理，证明过程略

定理 4.4.4 设线性变换 $\mathcal{A}: V\to V$ 在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的矩阵是 A ，并设

$$P(x)(xI_n - A)Q(x) = D(x) := \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, f_{t+1}, \cdots, f_n)$$

其中 $P(x), Q(x)$ 是可逆多项式矩阵，$f_i(x)$ 是首一多项式．令

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P(x)^{-1}$$

则下列结果成立：

（1）$\beta_1 = \cdots = \beta_t = \mathbf{0}$ ；

（2）对于 $i > t, \beta_i$ 的最小多项式是 $f_i(x)$ ；

（3）V 是循环子空间 $F[x]\beta_i (t+1 \leq i \leq n)$ 的直和.

定理 4.4.5（有理标准形）．设 A 是域 F 上的 n 阶方阵，设多项式方阵 $xI_n - A$ 的 Smith 标准形为 ：

$S(x) = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, d_{t+1}(x), \cdots, d_n(x))$

则：

（1）A 的特征多项式 $\varphi_A(x) = d_{t+1}(x) \cdots d_n(x)$ ，最小多项式 $d_A(x) = d_n(x)$

（2）设 $B_i (i = t+1, \cdots, n)$ 是不变因子 $d_i(x)$ 的友阵，则 A 相似于准对角阵 $\operatorname{diag}(B_{t+1}, \cdots, B_n)$ ．

推论 4.4.6 设 $d_i(x)(i = t+1, \cdots, n)$ 的初等因子组是 $\left\{p_{ij}^{e_{ij}}(x) | 1 \leq j \leq j_i\right\}$ ，并设 B_{ij} 是 $p_{ij}^{e_{ij}}(x)$ 的友阵，则 A 相似于以 $B_{ij}(t+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq j_i)$ 为准对角阵块的准对角阵.

此条推论同时说明了特征方阵的初等因子与 Jordan 标准型的 Jordan

块是一一对应的

先证明（2）⇒（3）

由定理 4.4.4 我们得到（2）的一个等价条件：存在一个向量 β s.t. $V = \mathbb{C}^{n\times 1} = \mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$

证：设$V = \mathbb{C}^{n\times 1}$ 设 $\mathcal{A}: X \to AX, V \to V$

A 的特征方阵 $\lambda I - A$ 相抵于 $Smith$ 标准型 $S(\lambda) = (I(s), d_{s+1}(\lambda), \cdots, d_n(\lambda))$

又$\varphi_A(x) = d_A(x)$ 等价于 $d_{s+1}(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = 1$ 即得（定理 4.4.4）

设A与B可交换，那么V上线性变换$\mathcal{B}: y \to By$与$\mathcal{A}: X \to AX$可交换

$\mathcal{B}\beta \in V = \mathbb{C}[A]\beta$ 即存在$g(x)$ s.t. $\mathcal{B}\beta = g(\mathcal{A})\beta$

又 $\forall v \in V$ 可以写成 $v = h(\mathcal{A})\beta$ 其中h为多项式

就有$\mathcal{B}v = \mathcal{B}h(\mathcal{A})\beta = h(\mathcal{A})\mathcal{B}\beta = h(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\beta = g(\mathcal{A})h(\mathcal{A})\beta = g(\mathcal{A})v$

也就是$\mathcal{B} = g(\mathcal{A})$

即 $B = g(A)$

（1）与（2）等价的证明

我们不妨直接考虑 Jordan 标准型

引理 1：与单个 Jordan 块可交换的矩阵B构成的线性空间维数等于此

Jordan 块的阶数

证：$N_n = J_n(\lambda) - \lambda I_n$ 也与 B 可交换，比较两边元素即可，B 形如

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{pmatrix}$$

引理 2：与两个及以上相同特征值 Jordan 块构成的 Jordan 标准型 J 可交换的矩阵构成的线性空间维数比 J 的阶数大

证：考虑两个相同特征值 Jordan 块构成的 Jordan 标准型 J 即可，$J - \lambda I_n$ 也与 B 可交换，比较两边元素立得

再给出一个（2）的等价条件：A 的 Jordan 标准型的每个特征值对应的 Jordan 块都只有一个

这是推论 4.4.6 的直接结果

结合上面的引理和等价条件就说明（1）与（2）等价

事实上，利用此方法配合中国剩余定理可以得到（2）⇒（3）的另外一种证法

（3）⇒（1）

先由引理二我们知道 $\dim Z(A) \geq n$

又特征多项式零化A，那么 $\dim Z(A) \leq n$

则 $\dim Z(A) = n$

至此我们证明了这三个命题是等价的

最后我们给出扩充版的等价条件：

A为 n 阶复方阵，记 $Z(A) = \{B|AB = BA\}$ ，则 $Z(A)$ 是复线性空间，且下列条件等价

（1）$\dim Z(A) = n$

（2）A的最小多项式$d_A(x)$等于其特征多项式$\varphi_A(x)$

（3）$Z(A)$中任意矩阵B都可以写成A的多项式的形式

（4）存在一个向量 β s.t. $V = \mathbb{C}^{n\times 1} = \mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$

（5）$\mathcal{A}$是循环变换

（6）A的特征方阵的行列式因子为 $1, \cdots, 1, f(x)$

（7）A的特征方阵的不变因子为 $1, \cdots, 1, f(x)$

（8）A任意一个特征值的特征子空间维数为 1（$r(A - \lambda_i I) = n - 1$）

（9）A的特征方阵的初等因子组为$p_1(x)^{r_1}, \cdots, p_k(x)^{r_k}$，其中$p_1(x), \cdots, p_k(x)$为数域$F$上互异的首一多项式

（10）A的 Jordan 标准型的每个特征值对应的 Jordan 块都只有一个

（11）$\mathcal{A}$在一组基下的矩阵为友阵

其余等价条件均是书上定理的简单推论，在这里不再证明了