装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院
2022学年秋季学期考试试卷

课程名称 泛函分析(H)　　课程编号 001706.01

考试时间 2023年2月23日　　考试形式 闭卷

姓名________　学号________　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. (10 分) 在中科大东区 USTC1958 咖啡厅的一张桌子上平摊着一张合肥市的精确地图，证明地图上恰有一个点是正好位于它所代表的点上。

二. (15 分) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一组正交规范基。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $f_n = e_{n+1} - e_n$. 证明：由序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 张成的子空间在 H 中稠密。

三. (15 分) 设 X 为 B 空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$. 如果存在 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 使得 $x_n \to x$ (按范数收敛)且 $w^* - \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

四. (20 分) 设 $K(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(2\pi n(x+y)), \forall 0 \le x, y \le 1$. 定义 $L^2[0,1]$ 上的线性算子

$$T : u(x) \mapsto u(x) + \int_0^1 K(x,y)u(y)\mathrm{d}y \quad (\forall u \in L^2[0,1]).$$

1. 证明：T 是 $L^2[0,1]$ 上 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(T) = 0$.
2. 求 T 的谱集 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

五. (20 分) 设 X 是一个实 B 空间, $f, g \in X^*$ 满足 $\|f\| = \|g\| = 1$. 证明：

1. 如果 $g(x) = 0$ 对任意 $x \in N(f)$ 成立，则我们有 $f = g$ 或 $f = -g$.
2. 如果存在 $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 使得 $|g(x)| \le \epsilon\|x\|$ 对任意 $x \in N(f)$ 成立, 则我们有

$$\|f - g\| \le 2\epsilon \text{或者} \|f + g\| \le 2\epsilon.$$

（注：$N(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$）

六. (20 分) 设 X, Y 是两个 B 空间, $T \in L(X, Y)$ 且 T 为满射。证明：以下两个条件彼此等价

1. 存在 $S \in L(Y, X)$ 使得 $TS = I_Y$, 其中 I_Y 是 Y 上的恒同算子.
2. 存在 X 的闭子空间 W 使得 $X = N(T) \oplus W$, 其中 $N(T) = \{x \in X : T(x) = \theta\}$.