

中国科学技术大学

2022—2023学年第一学期期末考试试卷

考试科目 贝叶斯分析 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2022年2月21日下午2:00—4:00, 闭卷

一. (20分) 设 $X = (X_1, \dots, X_n)$ 为来自正态分布 $N(\theta, \sigma^2)$ 的简单样本, 试求:

- (1) (θ, σ) 相互独立时的无信息先验;
- (2) (θ, σ) 不相互独立时的无信息先验;
- (3) (θ, σ) 的共轭先验.

二. (20分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自二项总体 $B(1, \theta)$ 的简单样本, 先验分布 π 为 $Beta(a, b)$, 即 $\pi(\theta) = \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}$. 试

- (1) 求后验均值估计 $\hat{\theta}$, 说明此估计相比于最大似然估计的合理性.
- (2) 求 θ 的 $1 - \alpha$ 最大后验密度(HPD)可信区间.
- (3) 证明 $\hat{\theta}$ 具有后验渐近正态性.

三. (20分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自 $N(\theta, 1)$ 的简单样本, 考虑假设检验问题 $H_0: \theta = 0 \leftrightarrow H_1: \theta \neq 0$. 假定 θ 的先验密度为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \theta = 0 \\ \frac{1}{4}e^{-|\theta|}, & \theta \neq 0 \end{cases}$$

试

- (1) 求假设 H_0 成立的后验概率, 以及检验问题的贝叶斯因子.
- (2) 记决策 a_0 表示接受 H_0 , a_1 表示接受 H_1 , 两个决策的损失函数为

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ 1, & \theta \neq 0. \end{cases} \quad L(\theta, a_1) = \begin{cases} 2, & \theta = 0, \\ 0, & \theta \neq 0. \end{cases}$$

求此时检验问题的贝叶斯解.

四. (15分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自 $N(\theta, 1)$ 的简单样本, θ 的先验分布为 $N(0, \tau^2)$. 考虑假设检验问题 $H_0: \theta \leq 0 \leftrightarrow H_1: \theta > 0$. 损失函数取为0-1损失. 则

- (1) 求贝叶斯决策 δ .

(2) 证明贝叶斯风险 $R_\pi(\delta)$ 为

$$R_\pi(\delta) = 2 \int_{\theta > 0} \Phi(-\sqrt{n}\theta) \pi(\theta) d\theta$$

其中 $\pi(\cdot)$ 表示 θ 的先验分布 $N(0, \tau^2)$ 的密度.

五. (25分) 考虑回归模型

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + e_i = x_i' \beta + e_i, i = 1, \dots, n$$

其中 $\sum_{i=1}^n y_i = 0, \sum_{i=1}^n x_{ij} = 0, \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 = n, j = 1, \dots, p$. $e_1, \dots, e_n$ 为独立同分布的 $N(0, \sigma^2)$ 误差. 假设 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ 是可交换的参数, 有如下Spike-and-slab分层先验:

$$\beta_j \mid \gamma, \tau^2 \sim \gamma N(0, \tau^2 \sigma^2) + (1 - \gamma) N(0, 0.0001)$$

$$\tau^2 \sim IG(0.5, 0.5), \text{ for } j = 1, \dots, p$$

$$\sigma^2 \sim IG(0.5, 0.5)$$

$$\gamma \sim B(1, \pi_0)$$

其中 $IG(a, b)$ 表示逆伽马分布, 密度为 $\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp(-\frac{b}{x})$. 试

(1) 写出参数 $\beta, \sigma^2, \gamma, \tau^2$ 的全条件分布.

(2) 写出WinBUGS程序代码.