2021 拓扑学(H)期中

授课教师：王作勤 时间：2 小时 20 分钟

（原卷为英文）

问题 1（每题 4 分，共 20 分）

写下下列定义

（1） 称映射$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$是两个度量空间间的（等距）嵌入的含义

（2） 称集族$\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$是$(X,\mathcal{T})$的<u>基</u>的含义

（3） 称拓扑空间$(X,\mathcal{T})$<u>第一可数</u>的含义

（4） 称一个拓扑空间<u>Hausdorff</u>的含义

（5） 设X是拓扑空间，Y是度量空间。称一族函数$\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$<u>等度连续</u>的含义

（6） 设X是拓扑空间，$\{U_\alpha\}$是X的开覆盖。称$\{\rho_\alpha\}$是从属于$\{U_\alpha\}$的<u>单位分解</u>的含义

问题 2（每题 2 分，共 20 分）

判断以下叙述的对错

在正确的前写“T”，错误的前写“F”。

(　)设(X,d)是度量空间且$A\subset X$。定义$d_A(x)\coloneqq\inf_{\mathrm{a}\in\mathrm{A}} d(a,x)$。则$d_A(x)$当且仅当$x\in A$

(　)设$X=\bigcup_\alpha A_\alpha$和$f:X\to Y$为使每个$f|_{A_\alpha}$连续的映射，则$f$连续

(　)$(\mathbb{R},\mathcal{T}_{sorgenfrey})$第二可数

(　)$\mathbb{RP}^2$可以嵌入$\mathbb{R}^4$

(　)设$A_\alpha\subset X_\alpha$，则在$\left(\prod_\alpha X_\alpha,\mathcal{T}_{product}\right)$中$\overline{\prod_\alpha A_\alpha}=\prod_\alpha\overline{A_\alpha}$

(　)可数紧空间的任意子集仍可数紧

(　)若X第一可数，（T1）且极限点紧，那么它列紧

(　)设(X,d)是度量空间，$x\in X$。那么存在$\delta>0$使得闭球$\overline{B(x,\delta)}$紧

(　) $\mathbb{Q}$（作为实直线$\mathbb{R}$的子集）非局部紧

(　)Hausdoff 空间的任意子集 Hausdoff

(　)若每个$(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$可度量化，那么$\left(\prod_\alpha X_\alpha,\mathcal{T}_{product}\right)$也是如此

问题 3（每题 4 分，共 20 分）

写下满足给定要求的例子（<u>不需要细节</u>）

(a)$\mathbb{R}$上的非离散度量$\mathcal{T}$使得恒等映射$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},\mathcal{T}_{Euclid})\to(\mathbb{R},\mathcal{T})$不连续

(b)不完备的度量空间

(c)紧但不列紧的拓扑空间

(d)$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$无处为 0 却不稠密的子代数

(e)可分却不可度量化的拓扑空间

(f)连续满射$f:[0,1]\to\left([0,1]^{\mathbb{N}},\mathcal{T}_{product}\right)$

问题 4（15 分）

对拓扑空间X的子集A，分别记其内点、闭包、边界为$A^\circ,\bar{A},\partial A$

(a) 证明：$A^\circ\cap\partial A=\emptyset,\bar{A}=A^\circ\cup\partial A$

(b) 证明：$\partial A=\emptyset$当且仅当A既开又闭

(c) $\boxed{A\text{是开集当且仅当}A=(\bar{A})^\circ}$是否成立？证明或给出反例

问题 5（15 分）

集合X上的准度量（quasi-metric）指$d: X \times X \to \mathbb{R}$使得

- $d(x,y) \geq 0$对任意$x,y \in X$成立，且$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
- $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$对任意$x,y,z \in X$成立

换而言之，准度量就是“没有对称性的度量”

(a) 在准度量空间(X,d)中定义“开球”和“开集”

(b) 定义$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$d(x,y)=\begin{cases} x-y, x \geq y \\ 1, x<y \end{cases}$

(i)验证：$(\mathbb{R},d)$是准度量空间

(ii)$\mathbb{R}$上由此准度量生成的拓扑是什么？

(c) 证明：任意准度量空间(A1)、(T1)

问题 6（15 分）

设$X_\alpha(\alpha \in \Lambda)$是拓扑空间

(a) 写出$\prod_\alpha X_\alpha$上乘积拓扑的定义

(b) 叙述乘积拓扑的泛性质

(c) 证明对拓扑的“乘积运算（product operation）”是交换的、结合的。具体来说，

证明: 若指标集Λ有分解（decomposition）$\Lambda=\bigcup_\beta \Lambda_\beta$，其中$\beta \neq \beta'$时$\Lambda_\beta \cap \Lambda_{\beta'}$.

那么$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$同构于$\prod_\beta \left(\prod_{\alpha\in\Lambda_\beta} X_\alpha\right)$，其中每个乘积都被赋予了乘积拓扑

问题 7（15 分）

(a) 叙述管道（tube）引理

(b) 证明：若Y紧，那么投影$\pi_1: X \times Y \to X$是闭映射

(c) 证明：若X第一可数，Y可数紧，那么投影$\pi_1: X \times Y \to X$是闭映射

问题 8（15 分）

设X是拓扑空间。固定点$p=(a,0)\in X\times[0,1]$。设CX是X上的拓扑锥（topology cone），C_pX是$X\times[0,1]$中的"几何锥"，它如下定义

$$C_pX\coloneqq\{(1-t)(x,1)+tp|x\in X,t\in[0,1]\}\subset X\times[0,1]$$

并赋予子空间拓扑。（故C_pX是$X\times[0,1]$中所有连接点$(x,1)$和$p=(a,0)$的"线段（line segments）"的并）

(a) 写出拓扑锥CX的定义

(b) 设X紧且 Hausdoff。证明：CX同胚于C_pX

(c) X不紧时如何？证明CX同胚于C_pX，或找一个例子并证明它们不同胚

问题 9（15 分）

(a) 叙述 Urysohn 度量化定理

(b) 设X是紧 Hausdoff 空间。令$\Delta=\{(x,x)|x\in X\}$。证明：若Δ是$X\times X$中的G_δ集，则X可度量化

[警告：这部分远难于其他问题]