中国科学技术大学2021年春
复分析期中考试试卷

2021年5月16日

姓名：__________ 系别：__________ 学号：__________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									
阅卷人									

1. (24分) 计算下列各题

(1) $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln|z|$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=1} (\bar{z}+1)\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}\mathrm{d}\theta$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{2z^{-3}}{e^z+e^{-z}}\mathrm{d}z$

2. (24分) 判断下列说法是否正确，说明理由.

(1) $\sin z$ 是复数域上的有界函数.

(2) 全纯函数在其定义域上一定有原函数.

(3) 设 f 为单位圆盘上的全纯函数且 f' 恒不为零，则 f 为单叶全纯函数.

(4) 设 $|z_k| > 1, k = 1, 2, \cdots, 2021$, 则存在 z_0 满足 $|z_0| = 1$ 且 $\prod_{k=1}^{2021} |z_0 - z_k| > 1$.

3. (6分) 设区域 D 上的全纯函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 满足 $u = v^2$，其中 u, v 为 C^1 函数. 证明 f 为常值函数.

4. (6分) 求 $e^z - 4z - 1$ 在单位圆盘内的零点的个数.

5. (10分) 证明以下结论.

(1) 当 $\mathrm{Re}(z_1) \leq 0, \mathrm{Re}(z_1) \leq 0$ 时，$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|$;

(2) 当 $|z| < 1$ 时，$|1 - (1-z)e^z| \leq |z|^2$.

6. (10分) 叙述全纯函数的Schwarz引理，并用最大模原理证明之.

7. (10分) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R > 0$. 若 $|z| < R$ 时，$|f'(z)| \leq M$, 证明：$n \geq 1$ 时，

$$a_n \leq \frac{M}{nR^{n-1}}.$$

8. (10分) 设 $p(z)$ 为 n 次复系数多项式，对 $r > 0$, 记 $M(r) = \sup_{|z|=r} |p(z)|$.
证明：

(1) $M(r)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数;

(2) $\dfrac{M(r)}{r^n}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数.