2021 春复分析(H)期末

授课教师：李皓昭 时间：2 小时

一. (30 分)计算题

1.

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-2)}$$

2. 分别求$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在$\{z\in\mathbb{C}|1<|z|<2\}$和$\{z\in\mathbb{C}||z|>2\}$中的Laurent展开式

3. 利用留数定理计算

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3+2\cos\theta}$$

二. (10 分)设$f(z)$是域Ω上的全纯函数，若$f(z)\neq 0, \forall z\in\Omega$，证明：存在$\Omega$上的全纯函数$g(z)$，使得$f(z)=e^{g(z)}$。

三. (10 分)构造区域$\{z\in\mathbb{C}\big||z-1|<\sqrt{2}, |z+1|<\sqrt{2}\}$到单位圆盘的共形映射，要求画清楚每一步的图，并写出最后的复合映射。

四. (10 分)设$f(z)$在$\mathbb{C}\backslash\{0\}$上全纯，且满足

$$|f(z)|\leq\sqrt{|z|}+\frac{1}{\sqrt{|z|}}$$

证明$f(z)$是常数。

五. (10 分)1.设幂级数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径是 1，若$f(z)$在$\frac{1}{2}$处的 Taylor 级数收敛半径是$\frac{1}{2}$，证明 1 是$f(z)$的奇异点；

2.设幂级数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径是 1，若$a_n\geq 0$，证明 1 是$f(z)$的奇异点。

六. (10 分)

1. 叙述整函数的 Hadamard 分解定理;
2. 给出e^z-1的 Hadamard 分解。

七. (20 分)设$\mathbb{D}_R=\{z\in\mathbb{C}||z|<R\}$

1. 设Ω是包含$\mathbb{D}_R$的域，$f(z)$在Ω上全纯，$f(0)\neq 0$，设$f(z)$在$\mathbb{D}_R$内的全部零点为$a_1,a_2,\dots,a_N$，且在$\partial\mathbb{D}_R$上$f(z)\neq 0$，证明:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta=\log|f(0)|+\sum_{i=1}^{N}\log\frac{R}{|a_i|}$$
2. 若 1 中$a_1,a_2,\dots,a_N$为$f(z)$在$\overline{\mathbb{D}_R}$内的全部零点，$f(0)\neq 0$，证明相同的结论;
3. 若$f(z)$在$\Omega\supset\overline{\mathbb{D}_1}$上全纯，$f(\mathbb{D}_1)\subset\mathbb{D}_1$，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{i}{2}\right)=0$，证明:
$$|f(0)|\leq\frac{1}{4}$$